**Rozwiązanie zadania M 352.** Zauważmy, że cykliczne przestawienie czwórki wyjściowej (np. $(a_1, b_1, c_1, d_1) \to (c_1, d_1, a_1, b_1)$) spowoduje jedynie analogiczne przestawienie wyrazów dalszych czwórek. Zauważmy teraz, że z dokładnością do przestawień cyklicznych mamy 6 kombinacji parzystości liczb $a, b, c, d$:

$$\alpha_1 = (p, p, p, p), \quad \alpha_2 = (n, p, p, p),$$
$$\alpha_3 = (n, n, p, p), \quad \alpha_4 = (n, p, n, p),$$
$$\alpha_5 = (n, n, n, p), \quad \alpha_6 = (n, n, n, n)$$

($n$ — liczba nieparzysta, $p$ — parzysta). Wykonanie opisanej w zadaniu operacji modyfikuje parzystość składników naszej czwórki zgodnie z grafem:

$$\begin{tikzcd}
\alpha_5 \arrow[dr] & & & & \\
& \alpha_3 \arrow[r] & \alpha_4 \arrow[r] & \alpha_6 \arrow[r] & \alpha_1 \arrow[loop above] \\
\alpha_2 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Widać stąd, że z dowolnej czwórki $(a, b, c, d)$ dojdziemy w najwyżej 4 krokach do czwórki liczb parzystych, a ogólniej — po najwyżej $4n$ krokach do czwórki liczb podzielnych przez $2^n$. Wystarczy teraz zauważyć, że największa z liczb $a_k, b_k, c_k, d_k$ nie może być większa od największego wyrazu czwórki początkowej, by zauważyć, że po dostatecznie dużej liczbie kroków otrzymamy same zera.

**Uwaga:** Gdy rozpatrzymy analogiczną konstrukcję dla trójek liczb, otrzymamy nieskończony cykl $(1,0,1) \to (1,1,0) \to (0,1,1) \to (1,0,1) \to \ldots$

**Rozwiązanie zadania F 147.** Przy stałej mocy silników ruch powinien odbywać się ze stałą prędkością. W rzeczywistości prędkość chwilowa podczas ruchu „jednostajnego" oscyluje wokół prędkości średniej. W przypadku jazdy samochodem czy rowerem fluktuacje prędkości mogą być niedostrzegalne; w przypadku holowania ich skutki stają się widoczne. Niech w pewnej chwili lina holownicza zwisa (np. motorówka została przyhamowana uderzeniem fali). Prędkość holowanej łodzi maleje (wskutek działania oporów ruchu), natomiast prędkość motorówki wzrasta, gdyż ruchu jej chwilowo nie hamuje ciągnięta na linie łódź. Odległość między motorówką a łodzią rośnie i lina napina się. Powoduje to przyspieszenie ruchu łodzi i przyhamowanie motorówki — lina znów zwisa i cykl może się powtórzyć. Holowanie ze „stałą" prędkością na ogół odbywa się opisanym powyżej ruchem „szarpanym". Czasami jednak, jak w przypadku holowania narciarza wodnego przez motorówkę, lina może pozostawać stale napięta. Od czego to zależy?

## „Podpieramy stary dom..."

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne wydały ciekawą pozycję — podręczniki matematyki dla szkoły podstawowej wydane dla nauczycieli (jest nadruk — wydanie dla nauczycieli).

Czym różni się podręcznik np. dla klasy 5 „zwykły" od „nauczycielskiego"? Otóż, przy zachowaniu identycznego układu, w podręczniku „nauczycielskim" są rozwiązane wszystkie zadania, zamieszczone są odpowiedzi na wszystkie pytania. Jest to wykonane elegancko — rozwiązania i odpowiedzi naniesione są na tekst tak, jakby było to ręcznie długopisem zrobione. I tak przy zadaniu polegającym na uporządkowaniu danych ułamków od najmniejszego do największego są wypisane jeszcze raz te ułamki już we właściwej kolejności. Jest też dopisane, że 4 : 9 to 0,444... i inne tego rodzaju wyniki. Uzupełnione są wszelkie tabelki. Dowiadujemy się, że bok rombu nie wyznacza jego pola, słowem — żadnych wątpliwości mieć nie można.

Jak każda nowość, tak i ta inicjatywa, budzi zgrozę u nastawionych konserwatywnie. Rodzi się bowiem obawa, że wydanie „nauczycielskich" podręczników było konieczne. I, że w przeciwnym razie byłaby, nie dająca się zlekceważyć, grupa nauczycieli, którzy nie umieliby porównać wielkości ułamków czy też wypełnić każdej z przeznaczonych dla uczniów tabelek. Słowem — obawa, że część nauczycieli matematyki nie mogłaby uzyskać np. w 5 klasie oceny bardzo dobrej z matematyki.

Są i optymiści widzący w fakcie umożliwienia pracy w zawodzie nauczycielskim również takim ludziom przejaw postępującej dalszej demokratyzacji i realizację zasady równego startu dla wszystkich.

Realiści cieszą się z tej okazji, bo uczeń, który dobrze rozwiąże zadanie, nie będzie prześladowany za to przez nauczyciela, który uzyskał inny wynik.

Podręcznik „nauczycielski" zaopatrzony jest na końcu w instrukcję dydaktyczną sugerującą właściwe sposoby prowadzenia zajęć.

Nakład „nauczycielskiego" podręcznika wynosi 40 tysięcy, a więc może zaspokoić potrzeby nauczających (o ile nie zostanie w znacznej części wykupiony przez troskliwych rodziców dla ich pociech ani nie stanie się przedmiotem spekulacji).

Niewątpliwie podręcznik taki jest skrótowo, ale dobitnie przedstawionym raportem o stanie polskiej oświaty. Ale nie tylko. Jest to bowiem również raport o kierunku działań, jakie przedsiębierze resort oświaty w związku z zaistniałym stanem. Okazuje się, że nie tylko nieuświadomieni, zagubieni w skomplikowanej rzeczywistości, przygarbieni kryzysem, rozczarowani nieliczni obywatele ulegają filozofii nędzy.

Filozofię nędzy (w tym przypadku intelektualnej) głosi stosowne ministerstwo. Nauczyciele matematyki w szkołach podstawowych nie opanowali materiału, którego mają nauczać — dajmy im sposób, by mimo to uczyli. Zgódźmy się na zło, starając się równocześnie minimalizować jego skutki. Podpierajmy stemplami walący się dom — może do jutra wystarczy.

Nędza takiej filozofii (żeby kontynuować cytowanie) staje się jeszcze lepiej widoczna, gdy przypominamy sobie o decyzji kierującej do szkół nowych nauczycieli z wykształceniem tylko średnim, czy o nieobowiązkowej maturze z matematyki. Pomysł odłożenia wychodzenia z kryzysu do czasu, gdy wyjdziemy z kryzysu, okazuje się nie tylko paradoksem — jest to realizowany (przynajmniej w nauczaniu matematyki) program.

*Marek KORDOS*

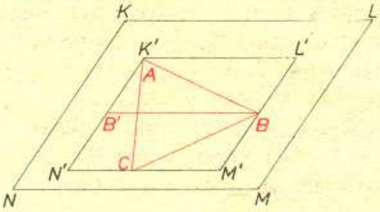
## Lenistwo ukarane, czyli historia pewnego zadania

Kiedy na egzaminie wstępnym na matematykę (uniwersytet, lipiec 1983) pojawiło się zadanie treści:

*Środki sfery wpisanej w stożek i sfery opisanej na tym stożku pokrywają się. Znaleźć objętość tego stożka, jeżeli promień sfery wpisanej wynosi $r$;*

przy ocenie względnej trudności uznano je jednogłośnie za najłatwiejsze. Ekstremiści byli nawet zdania, że nie należy brać go pod uwagę przy ocenie całości egzaminu, a co bardziej leniwi (do których należałem) wybrali je do sprawdzania.

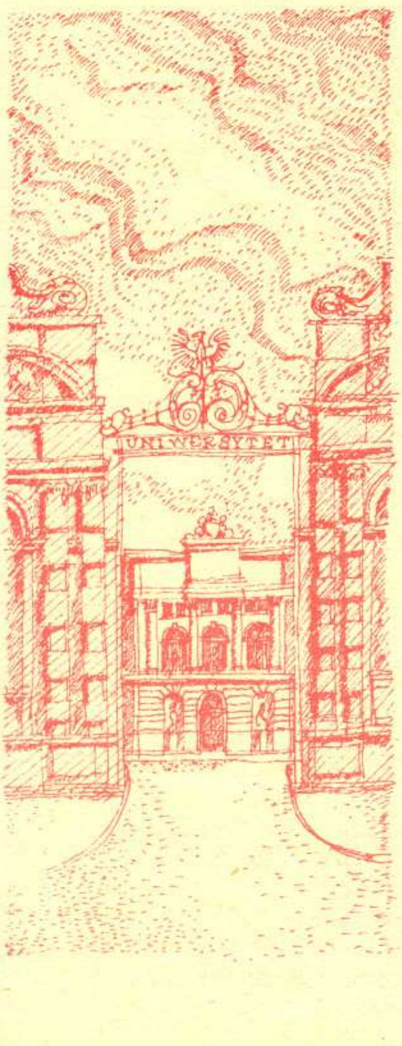
**Rozwiązanie zadania M 353.** Przesuwając boki równoległoboku $KLMN$ możemy doprowadzić do tego, by na każdym boku nowego, zawartego w $KLMN$ równoległoboku $K'L'M'N'$ leżał wierzchołek trójkąta $ABC$.




W szczególności jeden z wierzchołków trójkąta (np. $A$) będzie się pokrywał z jednym z wierzchołków (np. $K'$) równoległoboku $K'L'M'N'$. Niech teraz wierzchołek $B$ leży na boku $L'M'$. Prowadząc odcinek $BB' \parallel K'L'$ do punktu $B'$ na odcinku $K'N'$ zauważymy, że $S_{ABC} \leqslant$

$$\leqslant S_{ABCB'} = S_{ABB'} + S_{BB'C} = \frac{1}{2} S_{K'BB'L'} + \frac{1}{2} S_{BB'N'M'} = \frac{1}{2} S_{K'L'M'N'} \leqslant \frac{1}{2} S_{KLMN},$$

co należało wykazać.




No bo w końcu:
Przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś stożka da nam trójkąt oraz okrąg w niego wpisany i na nim opisany. Ponieważ środki tych okręgów (jako środki sfer, o których w zadaniu mowa), pokrywają się, trójkąt musi być trójkątem równobocznym. Wobec tego środki okręgów wpisanego i opisanego pokrywają się z punktem przecięcia wysokości i środkiem ciężkości trójkąta i mamy:

$h = 3r$. Ponieważ w trójkącie równobocznym o boku $a$ mamy $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

więc $a = \dfrac{2 \cdot 3r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$ i $r_{\text{podstawy}} = \dfrac{a}{2} = r\sqrt{3}$, zatem

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2_{\text{podstawy}} \cdot h = 3\pi r^3.$$

Można oczywiście próbować wetknąć tu i ówdzie nieco trygonometrii bądź znaleźć parę trójkątów prostokątnych i pobawić się twierdzeniem Pitagorasa. Autorowi wydawało się jednak, że sprawdzanie będzie polegało na rzucie oka na rozwiązanie, sprawdzeniu, czy wszystkie opisane wyżej kroki rozumowania i rachunków są napisane i postawieniu maksymalnej liczby punktów.
Nie doceniliśmy jednak potęgi wyobraźni. Sprawdzanie okazało się ciężką pracą, w której jedyną osłodą była rosnąca na tablicy tabelka, w której wpisywaliśmy osiągane przez autorów rozwiązań wyniki końcowe.

Oto one:
Dla przejrzystości podzielmy tabelkę na 4 części. W pierwszej podamy wyniki poprawne, choć nieco oryginalnie zapisane:

$$\frac{2}{3}\pi \frac{\sin 60°}{\operatorname{tg}^3 30°} r^3; \qquad \frac{9\pi}{\operatorname{tg}^2 60°} r^3; \qquad \frac{\pi}{\operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{6}} r^3.$$

Największa grupa to wyniki typu $p \cdot \pi r^3$, podamy tylko wartości $p$ w takiej kolejności, w jakiej ukazywały się oczom sprawdzających:

$$8\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{1}{3};\ 8;\ 9;\ 5;\ \frac{25}{24};\ 1;\ \frac{3}{8};\ \frac{9}{4};\ 12;\ \frac{27}{64};\ 4;$$

$$4(\sqrt{3}-1);\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^3;\ \frac{1}{3}\cdot 8\sqrt{5};\ \frac{1}{3}\cdot 4(\sqrt{5}+1);\ \frac{3}{16};$$

$$\frac{5}{6}\cdot\sqrt{15};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{3}(\sqrt{2}+2).$$

Wydawałoby się, skoro stożek jest bryłą obrotową, to $\pi$ powinno pojawić się w każdym rozwiązaniu. A jednak: $\dfrac{27}{4} r^3$ oraz $\dfrac{81 \cdot r^3}{4\sqrt{3}}$ rozwiały nasze złudzenia.
Pozostały wreszcie wyniki, świadczące o tym, dokąd może zaprowadzić

nieskrępowana wyobraźnia: $\dfrac{1}{3}\pi\sqrt{3r^2}\cdot 3r$; $2\sqrt{3}\pi r^2$; $3\sqrt{3}\pi r^2$;

$$\frac{1}{3}\cdot r \cdot \operatorname{tg} 60°\left(r + \sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 60° + r^2}\right);$$

$$\frac{1}{3}\pi \frac{2r^2 + 2\sqrt{3}\,r\sqrt{r^2+r} + 3r}{4};\quad \frac{2}{3}\pi r \cdot \frac{2r^3(4r^2 - r + 1)}{(1-4r^2)^3}$$

i najpiękniejsze: $\dfrac{1}{3}\pi\left(\left(\dfrac{2r^3+2r}{r^2-1}\right)^2 - r^2\right)\left(\dfrac{2r^3+2r}{r^2-1} + r\right).$

Pozostaje tylko zaproponować Czytelnikowi parę ćwiczeń umysłowych:

1. (łatwe): Znaleźć w drugiej grupie wyników ujemną objętość. Znaleźć średnią arytmetyczną tych wyników i porównać ją z wynikiem prawidłowym.
2. (trudniejsze): Dla jakich $r$ wyniki ostatniej grupy dają ujemną objętość? Ogólniej — spróbuj, Czytelniku, zbadać przebieg funkcji $V(r)$.
3. (skrajnie trudne): Spróbować dla dowolnego wyniku z grupy 3 lub 4 odtworzyć rozumowanie, które do tego wyniku doprowadziło.

*mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI*