W ciągu dwóch przeszło lat swego istnienia liga zadaniowa zdążyła okrzepnąć i obrosnąć w piórka. Rubryka „Klub 44" jest już stałą pozycją w naszym miesięczniku. Sam zaś Klub 44 — w chwili, gdy piszemy te słowa — liczy dziewięciu członków; a do momentu, gdy Czytelnicy dostaną ten numer do rąk — przekroczy zapewne dziesiątkę. Dwóch uczestników: pan Jerzy Janowicz i pan Jacek Uryga — zdążyło wykonać już po dwa czterdziestoczteropunktowe okrążenia. Co miesiąc włączają się do konkursu nowi uczestnicy z całej Polski, z wielkich i małych miejscowości.

Liga gra!

Zdecydowaliśmy się przytoczyć w pełnym brzmieniu regulamin ligi, wydrukowany dotychczas tylko raz, w numerze 9/1981. Pragniemy zwrócić uwagę na punkt 7: każde zadanie na oddzielnej kartce; to naprawdę dla nas ważne. Uczniów i studentów prosimy o dane dotyczące szkoły lub uczelni (oczywiście nie ma potrzeby powtarzać tych danych co miesiąc — wystarczy podać je raz, a później tylko sygnalizować zmiany). Miło nam będzie, jeśli również inni uczestnicy napiszą, przy okazji, parę słów o sobie (zawód, praca, inne ciekawsze dane, wedle uznania). Zdecydowanie natomiast wymagamy, aby prace były podpisane imieniem i nazwiskiem. Prac anonimowych bądź podpisanych tylko inicjałami — nie czytamy.

Prosimy o przestrzeganie terminów nadsyłania rozwiązań. Wprawdzie w roku 1982 terminy te były fikcją (i wówczas tolerowaliśmy nawet duże opóźnienia), ale był to efekt potężnego zakłócenia cyklu produkcyjnego, które, miejmy nadzieję, nie będzie się powtarzać. Obecnie (jesień '83) numery ukazują się w zasadzie terminowo, co daje około półtora miesiąca na rozwiązywanie każdej kolejnej trójki zadań. Dopuszczamy więc jedynie niewielkie, kilkudniowe opóźnienia, które mogą być spowodowane opieszałością poczty.

Jak w omówieniu sprzed roku (*Delta* 11/1982), pragniemy ustosunkować się do próśb i sugestii powtarzających się w listach naszych Czytelników. Najczęstszym życzeniem jest obszerniejsza informacja o uzyskiwanych wynikach: publikowanie bardziej rozbudowanej czołówki ligi, szczegółowe podawanie ocen itp. Musimy odmówić: raz — z powodu braku miejsca, dwa — dlatego, że nieuniknione stałyby się wówczas informacje „negatywne" (słabe wyniki niektórych uczestników), a naszym zdaniem nie powinny być one publikowane. Skłonni za to jesteśmy ogłaszać obszerną tabelę ligową, zawierającą kilkadziesiąt nazwisk, powiedzmy, raz do roku, w numerze styczniowym.

Wychodząc naprzeciw naturalnym życzeniom tych uczestników, którzy chcieliby znać swoje oceny, proponujemy formę następującą: każdy, kto przyśle nam zaadresowaną do siebie **kartkę pocztową** (nie list, nie kopertę) ze sporządzoną według podanego wzoru tabelką z numerami zadań, których oceny chce znać — otrzyma tę kartkę wypełnioną. Sugerujemy przysyłanie takich kartek nie co miesiąc, ale co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań nie trzech, ale kilkunastu zadań.

Liczne uwagi Czytelników dotyczą doboru zadań, a najczęściej powtarza się zarzut: zadanie to a to było za łatwe, wręcz niepoważne... No cóż — tak właśnie miało być. Naszym zamierzeniem była i jest duża różnorodność zadań: trudne i łatwe, poważne i niepoważne. Nasza liga chce być przede wszystkim zabawą, dostępną i atrakcyjną dla osób o bardzo różnych kwalifikacjach matematycznych — czymś pośrednim między konkursami zadaniowymi w poważnych czasopismach naukowych a kącikami łamigłówek w popularnych tygodnikach.

Zadanie nr	34	35	39	40	41	42	45
Ocena							

Aktualne miejsce w tabeli:

Dziękujemy Czytelnikom, którzy dostarczyli nam zadań i prosimy o dalsze. Do każdego proponowanego zadania należy dołączyć rozwiązanie (choćby skrótowe) lub informację, że autor nie zna rozwiązania. Ponieważ autorzy zadań często są też uczestnikami konkursu, wprowadzamy do punktacji ligowej zasadę, że autor zadania otrzymuje „z urzędu" ocenę 1,0, pod warunkiem, że dostarczył zadanie wraz z rozwiązaniem (nawet jeśli rozwiązanie było tylko szkicowe); gdy natomiast zamieszczamy zadanie, które zostało dostarczone bez rozwiązania, autor zadania może uczestniczyć w konkursie na zwykłych zasadach.

Niektóre z przesłanych nam zadań mają tę wadę, że są zwykłymi „podręcznikowymi" zadaniami z kursu uniwersyteckiego. Mają one wprawdzie i elementarne rozwiązania, i mogłyby być dostępne, a przy tym ciekawe i trudne dla uczniów szkół średnich oraz dla innych uczestników bez wykształcenia matematycznego. Ale jednocześnie byłyby to zupełnie standardowe zadania dla uczestników będących studentami. Z tego względu nie bardzo się one nadają do naszej ligi. Zresztą, błędu tego nie udało się i nam uniknąć i kilkakrotnie zdarzyło się nam zamieścić zadanie tego typu.

Gdy już o błędach mowa — dziękujemy tym Czytelnikom, którzy zwrócili uwagę na błędy w naszych rozwiązaniach. Uwagi najczęściej dotyczyły „wpadki" w numerze 9/1982 (błędnie wydrukowane zadania 32 i 33 ⇒ niewłaściwe rozwiązania w numerze 1/1983); przepraszaliśmy już za to Czytelników (*Delta* 2/1983).

Wytknięto nam też pomyłkę w rozwiązaniu zadania 24, wydrukowanym w numerze 8/1982; powinno tam być: $z_2 = x_1 - 1$, $z_3 = x_2 - 1$ oraz oszacowanie liczby $2S$ z góry i z dołu przez liczby $q^2 \pm q - 6$.

Pragniemy tu zaznaczyć, że rozwiązania, które drukujemy, to najczęściej tylko szkice (oszczędność miejsca!). Bywają w nich pominięte różne szczegóły, czasem dość istotne; nierzadko sami nie wystawilibyśmy sobie maksymalnej oceny. Ale uważamy te szkice za wystarczające do tego, by Czytelnicy mogli odtworzyć pełne rozwiązanie z wszystkimi detalami. Tu uwaga: nie uważamy za lukę ani usterkę, gdy w zadaniu konstrukcyjnym lub „łamigłówkowym" (zadaniu, w którym należy dać przykład jakiegoś obiektu lub metody) rozwiązanie ogranicza się do podania samej odpowiedzi (żądanego przykładu). W jednym z listów zarzucono nam, że to za mało, że należy objaśnić tok poprzedzającego rozumowania. Mimo że rozprawka taka mogłaby być dość ciekawa, nie należy ona do rzeczy. Dać przykład — to dać przykład. Tak samo w zadaniach „na dowodzenie" rozwiązanie polega na podaniu dowodu w jego ostatecznym kształcie, bez opisywania drogi, która doń prowadziła.

Poświęcimy teraz trochę uwagi ciekawszym z dotychczasowych zadań ligowych. W omówieniu naszym znajdą się te zadania, które przez nielicznych tylko uczestników zostały rozwiązane poprawnie (lub z niewielkimi lukami — ocena $\geqslant 0{,}8$ pkt) oraz te, dla których uczestnicy konkursu podali rozwiązania istotnie różne od naszych rozwiązań — bardziej eleganckie lub ogólniejsze. Brak komentarza przy informacji o rozwiązaniu oznacza, że jest ono zasadniczo zgodne z naszym rozwiązaniem.

Zadanie 7 [Czy $(\bigwedge_x \lim_n f(x/n) = 0) \Rightarrow (\lim_{x\to 0} f(x) = 0)$?] okazało się, jak dotychczas, najtrudniejsze (współczynnik trudności WT = 3,82). Jedyne poprawne rozwiązanie, i to różne od naszego, przysłał A. Lenarcik (patrz *Delta* 11/1982).

Zadanie 11 [Równanie $W(x) = py$ w liczbach całkowitych] (WT = 3,14) rozwiązał poprawnie tylko M. Fiszer.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Zadania nr 73, 74, 75

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1984

73. Dane są liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$. Niech $s = x_1 + \ldots + x_n$ oraz niech s_k będzie sumą wszystkich x_i, z pominiętym składnikiem x_k ($k = 1, \ldots, n$). Dowieść, że $s_1^{-1} + \ldots + s_n^{-1} > (n+1)s^{-1}$.

74. Z talii 52 kart wybrano 13 kart. Niech $N = \binom{52}{13}$. Czy jest możliwe (chodzi oczywiście o możliwość „teoretyczną", nie „czasową" czy „techniczną") N-krotne wykonanie operacji polegającej na zastąpieniu jednej z 13 kart jedną z pozostałych 39 kart tak, by po N operacjach (ale nie wcześniej) wrócić do konfiguracji wyjściowej i żeby żadne dwa zestawy 13-kartowe, spośród wszystkich otrzymywanych po drodze, nie były identyczne?

75. W 1984 punktach sfery o promieniu R umieszczono równe masy tak, że środek masy otrzymanego układu pokrywa się ze środkiem sfery. Obliczyć sumę kwadratów wzajemnych odległości tych punktów.

Zadanie **75** przysłał nasz Czytelnik, pan Jarosław Cel z Końskich.

Redaguje
dr Marcin E. KUCZMA

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą Klub 44.
2. Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po 3 zadania w każdym numerze, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przesyłaniu opracowanych rozwiązań Redakcji *Delty*. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przesłać rozwiązanie choćby jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12, np. termin nadsyłania zadań z nr 11/1984 upływa 31 stycznia 1985). W numerze $n+4$ podawane są szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Na kopercie prosimy umieszczać dopisek: Klub 44.
8. Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednobrzmiących nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność logiczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 ustalaną według następującej zasady: jeżeli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3\frac{S}{N}$.
Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).
11. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) są sumowane. Z chwilą osiągnięcia łącznej sumy 44 punktów uczestnik staje się członkiem Klubu 44.
12. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem Klubu 44) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
13. Trzykrotne uzyskanie członkostwa Klubu 44 daje tytuł Weterana Klubu 44.
14. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*.
15. Członkowie Klubu 44 będą zapraszani na spotkania Klubu 44, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.
16. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian Regulaminu.

Zadanie 15 [Samochodem przez pustynię] (WT = 3,58). Zadowalającego rozwiązania nikt nie podał; jedynie Z. Kryłow znalazł strategię optymalną, ale bez dowodu optymalności.
Zadanie 17 [W wielokąt wypukły można wpisać kwadrat] (WT = 2,80). Maksymalną ocenę otrzymał tylko J. Janowicz, za odesłanie do literatury (tw. Sznirelmana, słuszne dla dowolnej krzywej zamkniętej, niekoniecznie wypukłej); własnego poprawnego rozwiązania nikt z Czytelników nie podał.
Zadanie 20 [Wielościan wypukły pomalowany dwoma kolorami] (WT = 3,77). Brak pełnego rozwiązania; jedna poprawna odpowiedź na jedno z pytań postawionych w zadaniu: M. Suchenek.
Zadanie 21 [Błąd w dowodzie implikacji: różniczkowalność $\Rightarrow$ ciągłość pochodnej] (WT = 3,23). Tylko R. Drabik i M. Suchenek.
Zadanie 13 i 25 $\left[\text{Zbieżność ciągu } x_n = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n}\right]$ oraz zadanie 46 (patrz niżej) tworzyły pewien cykl. Zadania 13 [przypadek $a > 1$] (WT = 3,61) nie rozwiązał prawidłowo nikt. Zadanie 25 [przypadek $0 < a < 1$] (WT = 3,55) — tylko J. Uryga.
Zadanie 29 [Rozkład kwadratu na trójkąty ostrokątne] (WT = = 2,37). Dużo dobrych rozwiązań. M. Gałecki podał rozkład na 8 części i pokazał (dowód dość długi), że na mniej części się nie da.
Zadanie 35 [Jakie skończone, nie zawarte w prostej, zbiory Z na płaszczyźnie mają własność: jeśli dwie proste przechodzące (każda) przez 2 punkty Z przecinają się, to punkt przecięcia $\in Z$?] (WT = 2,87). Rozwiązanie prawidłowe: T. Biegański, M. Gałecki, P. Kamiński, K. Trautman, J. Uryga. Efektowne rozwiązanie K. Trautmana (szkic): Weźmy trójkąt o wierzchołkach $A, B, C \in Z$, o najmniejszej możliwie wysokości h_C; wówczas prosta AB nie zawiera innych punktów zbioru Z (sprawdzenie łatwe). Przypuśćmy, że poza prostą AB leżą jeszcze co najmniej dwa punkty $P, Q \in Z$. Jeśli $PQ \parallel AB$, to $ABPQ$ musi być równoległobokiem i $Z = \{A, B, P, Q, S\}$, gdzie S jest środkiem tego równoległoboku; a jeśli $PQ \nparallel AB$, to wszystkie punkty Z, z wyjątkiem jednego z punktów A, B, muszą leżeć na prostej PQ (pomijamy nietrudne szczegóły sprawdzenia).
Zadanie 39 [Rozkład jedynki na sumę odwrotności różnych liczb nieparzystych] (WT = 2,67). Dużo dobrych przedstawień. Dowody tego, że minimalną liczbą składników jest 9, podali M. Gałecki, E. Orzechowski, M. Roman, K. Trautman.
Zadanie 40 [Co można powiedzieć o zespolonych pierwiastkach wielomianu $\Sigma a_k z^k$, gdy $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$?] (WT = 2,71). Tylko T. Biegański, M. Czerniakowska, J. Uryga uzyskali tezę: $|z| \leqslant 1$.
Zadanie 43 [W czworościanie $ABCD$: $A_n \in \overline{AD}$, $A_nD = AD/n$ i analogicznie określamy punkty B_n, C_n; $P_n = \text{pł}(A_n, B_{n+1}, C_{n+2}) \Rightarrow$ istnieje prosta zawarta we wszystkich płaszczyznach P_n] (WT = 2,90). Wiele ciekawych metod. Sporo ładnych rozwiązań geometrią analityczną (najzgrabniej — K. Trautman, z uogólnieniem na k-wymiarową przestrzeń afiniczną). Niektórzy (A. Gluza, M. Roman) wykorzystują analityczny warunek współpękowości, inni (Z. Zaus) — pojęcie dwustosunku. R. Pagacz stosuje rachunek wektorowy. A oto szkic rozwiązania, które podał A. Smolczyk: Niech X będzie punktem przecięcia

Rozwiązania zadań z numeru 9/1983

Przypominamy treść zadań:

61. Czy równanie $x^3+y^3+z^3 = 13579^2$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?

62. Wykazać, że w dowolnym trójkącie znak wyrażenia $2R+r-p$ zależy od tego, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

63. Rozszyfrować dodawanie. Znaleźć rozwiązanie:
a) w którym DWA jest liczbą możliwie największą;
b) w którym najwięcej razy występuje cyfra wyrażająca wiek ligi.

$$\begin{array}{r} \text{DWA} \\ \text{LATA} \\ \text{TRWA} \\ +\,\text{LIGA} \\ \hline \text{DELTY} \end{array}$$

61. Użyjemy kongruencji modulo 9. Łatwo sprawdzić, że sześcian dowolnej liczby całkowitej przystaje do 0 lub ± 1 (mod 9). Zatem dla dowolnej trójki liczb całkowitych x, y, z zachodzi relacja $x^3+y^3+z^3 \equiv r$ (mod 9), gdzie $r \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Ponieważ $m = 13579 \equiv -2$ (mod 9), więc $m^2 \equiv 4$ (mod 9). Wobec tego równanie $x^3+y^3+z^3 = m^2$ nie ma rozwiązań całkowitych.

62. Niech A, B, C oznaczają miary kątów danego trójkąta ABC. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = x,\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = y,\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = z,\ x+y = s,\ 1-xy = t.$$

Zgodnie ze znanymi wzorami

$$z = \operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \frac{t}{s}, \qquad \sin C = \frac{2z}{1+z^2} = \frac{2st}{s^2+t^2},$$

$$\sin A + \sin B = \frac{2x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2} = \frac{2s(2-t)}{s^2+t^2}.$$

Z zależności geometrycznych w trójkącie ABO (gdzie O jest środkiem koła wpisanego) wynika, że

$$AB = r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{r}{x}+\frac{r}{y} = \frac{rs}{1-t},$$

a ze wzoru sinusów dla trójkąta ABC dostajemy

$$AB = 2R\sin C = \frac{4Rst}{s^2+t^2}.$$

Przyrównanie prawych stron otrzymanych wyrażeń daje

$$r = \frac{4Rt(1-t)}{s^2+t^2}.$$

Ponieważ wreszcie

$$p = R(\sin A+\sin B+\sin C) = \frac{4Rs}{s^2+t^2},$$

po niedługich rachunkach dostajemy

$$2R+r-p = \frac{2R(s-t)(s+t-2)}{s^2+t^2} = -\frac{2R(x+y)(1-x)(1-y)(1-z)}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Różnica $1-x$ jest dodatnia, zerowa, ujemna odpowiednio, gdy kąt A jest ostry, prosty, rozwarty. Podobnie jest z czynnikami $1-y$ i $1-z$.

$$\text{Zatem } 2R+r-p \begin{cases} < 0 & \text{dla trójkąta ostrokątnego} \\ = 0 & \text{dla trójkąta prostokątnego} \\ > 0 & \text{dla trójkąta rozwartokątnego} \end{cases}$$

63. a) Z zapisu działania wynika, że DELTY < 30000, więc D = 1 lub D = 2. Aby zmaksymalizować DWA, celowe jest poszukiwanie rozwiązania, w którym D = 2, a W jest cyfrą dużą. Próba z W = 9 szybko prowadzi do sprzeczności. Próba z W = 8, po rozpatrzeniu kilku możliwości, prowadzi do rozwiązania (a).
b) Tym razem A = 2, skąd Y = 8 oraz D = 1. Dysponując tak bogatą informacją szybko i bez trudu znajdujemy odpowiedź (b).
Uwaga. Litery R oraz I pojawiają się jako składniki jednej tylko kolumny — są więc zamienne. I tak zamienne są w rozwiązaniu (a) cyfry 0 i 1, a w rozwiązaniu (b) cyfry 3 i 9.

(a)	(b)
284	152
9474	6242
7084	4352
9134	6902
25976	17648

prostych A_1B_2 i A_nB_{n+1} (proste te przecinają się — to łatwe). Na mocy twierdzenia Menelausa (patrz *Delta* 5/1983), zastosowanego do trójkąta A_1B_2D przeciętego prostą A_nB_{n+1}, zachodzi równość $DA_n \cdot A_1X \cdot B_2B_{n+1} = A_nA_1 \cdot XB_2 \cdot B_{n+1}D$, z której wykorzystując określenie punktów A_n i B_{n+1} otrzymuje się po krótkich rachunkach: $A_1X = 2\, B_2X$. Zatem położenie punktu X nie zależy od n; punkt ten należy do wszystkich płaszczyzn P_n. Podobnie Y, punkt przecięcia prostych A_1C_3 i A_nC_{n+2}, jest wspólny dla wszystkich n i należy do wszystkich P_n. Prosta XY jest szukaną prostą.

Zadanie 46 [Liczba pierwiastków równania $a^x = \log_a x$] (WT = 3,39) rozwiązali prawidłowo: R. Pagacz, K. Trautman, J. Tyszkiewicz, J. Uryga, W. Wasiak.

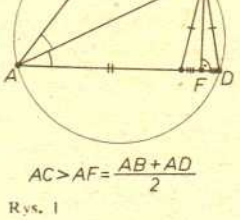
Zadanie 49 [Parzyste i nieparzyste liczby w trójkącie Pascala] (WT = 3,20). Dość dużo poprawnych rozwiązań; większość z nich, tak jak i nasze, wykorzystuje fakt, że liczba nieparzystych elementów n-tego wiersza trójkąta Pascala jest postaci 2^m — nie precyzując, jaki jest wykładnik m.
Kilku autorów (M. Gałecki, J. Janowicz, P. Kamiński, R. Mazurek, T. Rawlik) znalazło wartość m: jest to liczba jedynek w dwójkowym rozwinięciu liczby n.

Zadanie 50 [W czworokącie $ABCD$, wpisanym w koło, $BC = CD \Rightarrow 2\,AC > AB+AD$] (WT = 1,56) nie sprawiło uczestnikom konkursu żadnych trudności. Bardzo dużo prawidłowych rozwiązań, w większości opartych na rachunkach trygonometrycznych albo wykorzystujących twierdzenie Ptolemeusza. Warto wszakże odnotować proste i elementarne rozwiązania czysto geometryczne, które podali M. Fiszer i J. Tyszkiewicz (rys. 1) oraz D. Gross i M. Kmita (rys. 2).

Zadanie 52 [Wierzchołki łamanej zamkniętej $Ł$ można ponumerować kolejno $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ tak, by dla każdego $m \leqslant n$ mieć $A_0A_1 + \ldots + A_{m-1}A_m \geqslant (m/n) \cdot$ długość $Ł$] (WT = 2,82) zostało rozwiązane poprawnie przez dość wielu uczestników. Ale tylko dwóch (P. Kamiński, A. Pawłowski) zauważyło i napisało, że sprowadza się ono prosto do wcześniejszego zadania 31: oznaczając długości kolejnych boków przez $d_1, \ldots, d_n$ (startując z dowolnego miejsca) i przyjmując $a_i = d_i-(1/n) \cdot$ długość $Ł$ oraz $a_{i+n} = a_i$ otrzymujemy ciąg okresowy (a_i), w którym $a_1 + \ldots + a_n = 0$; w myśl zadania 31 istnieje numer k taki, że $a_k + \ldots + a_l \geqslant 0$ dla wszystkich $l \geqslant k$, skąd łatwo wynika teza zadania 52.

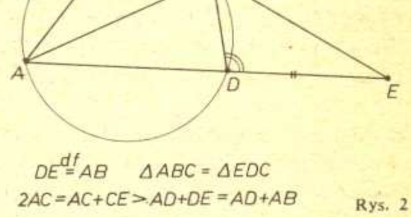
Zadanie 54 [Czy zbiór wypukły, nie zawierający półprostej, musi być ograniczony?] (WT = 3,56) bezbłędnie rozwiązał tylko J. Prajs. Rozwiązania z niewielkimi lukami podali W. Wasiak i M. Fiszer, z większymi — jeszcze kilku uczestników.

Za rok, w przybliżeniu, zamieścimy podobne omówienie, obejmujące dalsze zadania. Tymczasem zachęcamy Czytelników do włączenia się do ligi, „starych" uczestników — do kontynuowania zabawy, a wszystkim będziemy wdzięczni za listy z wszelkiego rodzaju uwagami na temat ligi zadaniowej „Klub 44"



$AC > AF = \dfrac{AB+AD}{2}$

Rys. 1



$DE \overset{df}{=} AB \qquad \Delta ABC = \Delta EDC$

$2AC = AC+CE > AD+DE = AD+AB$

Rys. 2