

# Opowieść wigilijna

Usiądźcie, Czytelnicy, szarą grudniową godziną przy kominku i posłuchajcie

## Jak trzy wektory wyznacznik do zera przyrównały

Za siedmioma przestrzeniami, za siedzioma podprzestrzeniami dana była pewna unormowana, dobrze uporządkowana rodzina wektorów  $w_1, w_2, w_3, \dots$ . Nie były one przynależne do żadnej wartości własnej, a mimo to rodzina żyła zgodnie i szczęśliwie. Nie mieli żadnych kłopotów, prócz jednego: jak zarobić na życie. Od okresu do okresu, od  $-\pi$  do  $+\pi$  pracowali w pocie czoła w bazie wielowymiarowego Sympleksu — wyzyskiwacza, darmozjada i homotopijcy, który całe swoje życie przeżył według zasady najmniejszego działania. I ruszyli się wektorowi bracia, striangulowali Sympleks, zrobili z niego Kompleks, ale doli swej nie polepszyli. Wyczynia on z nimi swoje homologiczne sztuczki: a to na brzeg wyrzuci, a to obszar określoności do punktu ściągnie ...

— Niedobrze żyć z takim Kompleksem — doszli do wniosku bracia. Nie ma na niego żadnych ograniczeń. I umyślili trzej najstarsi bracia:  $w_1, w_2$  i  $w_3$  wyruszyć w świat, obejść wszystkie przestrzenie i wszystkie podprzestrzenie, wszystkie powierzchnie i rozmaitości i znaleźć dogodny i prawy układ współrzędnych. Pokłonili się po raz ostatni starej Macierzy, podjęli ją za kolumny, a potem wyszli na czysto potencjalne pole i ruszyli ze skokiem  $\frac{h}{2}$  dokąd czy poniosą.  $\pi$  idą,  $2\pi$  idą,  $3\pi$  idą,

a potencjał wokół nich maleje i maleje. Popatrzyli bracia, a tu przed nimi na gładziutkiej płaszczyźnie zespolonej bieleje potok stabilny. Nie zwyczajny to potok, bo w podkowę Smale'a się zawijający.

— Ech, połović by rybki — westchnął  $w_1$ .

— A czemuż by nie? — zgodzili się bracia. Z punktu brzegowego zarzucili swą sieć epsilonową, którą już dziad ich dziada w nieośrodkowych oceanach domykał. A trzeba wam wiedzieć, że drzewiej nie takie epsilon jako dziś bywały. Patrzają bracia: w sieci ryba-sigma się trzepocze, ludzkim głosem przemawia:

— Nie gubcie mnie, mili moi, wypuście mnie do wody, a jeszcze się wam za to odwdzięczę.

Wypuścili ją bracia na wolność, a sami dalej poszli. Uśzli trochę, więcej niż 0, mniej niż  $\infty$ , patrzą: przy drodze mały parametr stoi, z głodu płacze. Ulitowali się nad nim bracia, nakarmili. Zaczął rosnąć parametr, a gdy osiągnął lokalne maksimum, pokłonił się braciom w pas i powiada: „Pamiętajcie o mnie, a ja jeszcze mogę się wam przydać”. I przepadł tak, jakby go w ogóle nie było.

Pociemniało nagle niebo, słońce schowało się za czarną chmurę. Zawirowały w powietrzu liście Kartezjusza, zakręciły się turbulენტne wiry, na polach wektorowych zakolysały się snopy koherentne, zdźbła z nich wiązki lecą. Ogniste błyskawice rozdarły niebieską sferę Riemanna. Obejrzeni się bracia, szukają schronienia. Patrzą: przy drodze stoi chatka na kurzej łapce.

— Chatko, chatko, odwróć się do nas plusem, do lasu minusem! — Zakolysała się chatynka, zakręciła. Weszli bracia do środka i dusza im się raduje. Stoi na środku izby stół i ugina się od jadła. Podjedli bracia, pytają: „Jest tu kto? Odezwij się, w imię Boże”. Patrzą, a zza pieca wychodzi kudłaty stwór: ni to wektor, ni to skalar, szczeciną pokryty, zakuty w łańcuchy.

— Witajcie, mileńcy moi. Jestem dobrym czarodziejem, a nazywam się Ko-Szi Mak-Loren. Już pół życia tu siedzę pod strażą okrutnej Nabli-Jagi, bo nie stosowałem się do jej zasady nieoznaczoności ...

Nie zdążył dokończyć, bo oto zaświszczało i zaszumiło coś za chatką. „Uciekajmy”, wykrzyknął Ko-Szi Mak-Loren. Rozkuli go bracia i biegną wszyscy ile sił w nogach. Obejrzeni się za siebie i widzą: leci po niebie przepiękna Delta. Uderzyła Delta o ziemię, stanęła na głowie i zmieniła się w straszną Nablę-Jagę. „Czuję, czuję, wektorami tu pachnie”.

Ale wektorów i Ko-Szi Mak-Lorena już ani śladu.

Wyprowadził Ko-Szi braci na geodezyjną, pokazał drogę do Dziwogrodu (który będziemy oznaczać przez Divgrad), a sam poszedł swoją drogą. Poszli bracia po linii geodezyjnej, a przed nimi rosły mury Divgradu, podobnie jak rośnie wykres tangensa przy argumentie dążącym do  $\pi/2$ . A rozbiegały się z nich promienie złociste, tak, jak rozbieżne są sumy częściowe szeregu harmonicznego. Zaszli bracia do otwartej (a nie domkniętej) gospody „Pod Pierwiastkiem”, pogadali z karczmarką, grubą Tyldą, a ona opowiedziała im o wielkim nieszczęściu, jakie nawdziło ich gród. Książę Divgradu, wielki Tensor Holomorficzny X, dobry, kowariantny pan, wyprawił Bał Niezmienniczy z okazji 16 rocznicy urodzin swej córki, pięknej Rezolwenty. Takiego balu jeszcze nie było w jego obszarze holomorficzności. Przyjechał na bal sam książę d'Y ..., w samosprężonej kolasce przybył graf Sinus ze swoją Sinusoidą. Wielowymiarowa muzyka delikatnie unosiła się po salach balowych, przy hiperbolicznych stolikach starsi grali w quasipreferans, w lożach młodzi oddawali się całkowaniu po  $dt$ . Strojna w liberie służba na każde skinienie różniczkowała gościom jadło i napitki. Przygasło nagle światło, po ścianach zatańczyły figury Lissajous, wypłoszyli się goście. A gdy znów rozbłysło światło, spostrzeżono, że Rezolwenty-krasawicy ani śladu. Metodą sprowadzenia do niedorzeczności wykazano, że porwał ją zły czarownik Vandermonde. Dostał on się na bal naruszając warunki holomorficzności Cauchy-Riemanna i wykonując zrzeczne podstawienie w szeregach straży.

Mocno wryła się braciom w duszę opowieść Tyldy. I postanowili zmierzyć się ze strasznym Vandermondem i wyzwolić z jego rąk nadobną Rezolwentę. Przez szereg dni i nocy przygotowywali się do wyprawy, wreszcie powróżyli sobie z hodografu i ruszyli w drogę.

Bajka przedzie się wartko, lecz rzecz wolniej się toczy. Nielatwe warunki brzegowe zagradzały braciom drogę do sąsiedniego obszaru, najeżonego pseudowektorami, w którym panowała klasowa nierówność Schwarza. Ale po obwieśni dostali się bracia do punktu rozgałęzienia, w którym tablica stoi: „Na lewo pójdziesz — współrzędne pogubisz, na prawo pójdziesz — nieskończoność zobaczysz, prosto pójdziesz — przetransponujesz się”. Zmartwili się bracia. „Co robić?”, nie wiedzą. Nagle jak spod ziemi wyrasta przed nimi dobry znajomy Ko-Szi Mak-Loren.

— Znam, znam wasze zmartwienia, bracia moi. Trudna to rzecz pokonać Vandermonde'a. Jego śmierć wyznacza wyznacznik. A wyznacznik ten leży w dodekaedrze, dwie macierze w bok od cyklu Hamiltona. A dodekaedr leży w ikosaedrze. A ikosaedr jest ściśle związany z zeramii funkcji meromorficznej: pierwszy węzeł zwyczajny, drugi nie ściałgalny, trzeci — logarytmiczny. A funkcja ta ma osobliwość w biegunie i dostać się tam — trudna sprawa. Leży on za  $2+3i$  górami,  $3-2i$  lasami, w zespolonej przestrzeni złego chara Banacha. A przy biegunie siedzi stwór-potwór o przestępnej liczbie zębów, wołają na niego Dekrement. A z drugiej strony siedzi pies Funktor, sobaka złowroga, sierść na nim jak na jeżu z  $m$  kolcami, ogon zwija się

jak w lemacie o wężu, funktorów pochodnych nie ma, bo nieaddytywna bestia. Taki to wyznacznik trzeba dostać i przyrównać do zera.

Znów wskazał im Ko-Szi drogę i poszli nią bracia, aż doszli do brzegu niepustego obszaru, wypełnionego cieczą nieściśliwą. Patrzą, myślą, co robić, nie wiedzą. Nagle wychyliła pyszczek z cieczy sigma-ryba, ludzkim głosem przemówiła:

— Teraz ja się wam przydam.

Przewiozła ich na drugi brzeg i wskazała dalszą drogę.

Nie zdążyli bracia przejść nawet 2 okresów, kiedy zagroziła im drogę nieciągłość pierwszego rodzaju. Ale któż to przed nimi skacze? Mały parametr!

— Wyście mi pomogli, a teraz ja wam pomogę — powiada.

Uderzył o ziemię, rozwinął się w szereg, zwiększył stopnie przy kolejnych wyrazach, potem raz jeszcze i jeszcze raz i przeszli bracia  $C^k$  — gładko na drugą stronę.

— A teraz idźcie po śladach operatorów prosto do bieguna — mówi.

Znaleźli  $w_1$ ,  $w_2$  i  $w_3$  ślady — patrzą, a rozchodzą się one na trzy strony świata. Poszli bracia każdy w swoją stronę. Szedł  $w_1$ , szedł, a tu jak spod ziemi wyrosły przed nim nieprzeliczone hordy chana Banacha, wszyscy (poza być może skończoną ilością), w formie jordanowskiej, ostrzyżeni równo niczym pod nawias Poissona.

— Ech, nie ujrę ja już swoich braci — wektorów — pomyślał  $w_1$  i rzucił się na wrogów. Ale oto już bracia nadbiegli. Pokonali

złego czarnoksiężnika. Psu Funktorowi rzucili padlinę. Połknął Funktor jeden kęs, drugiego nie może, bo nieaddytywny. Udławiła się bestia i zdechła. A tu zatrzęsa się ziemia, wpadła w rezonans i rozpekła się góra. Wyłazi ohydny stwór-potwór Dekrement. Nie stracili głowy bracia. Ze sznurków i lin skonstruowali za pomocą cyrkla i linijki 17-kąt foremny. Narzucili bestii na łeb, zaciągnęli. Zaplątał się potwór, przewrócił się na bok i wyzionął ducha.

Znaleźli bracia licznik i mianownik funkcji meromorficznej, wyznaczyli pierwiastki, strywializowali węzły, dobrali się do ikosaedru, wydostali dodekaedr, pobiegli po cyklu Hamiltona, otrzymali wyznacznik — i przyrównali go do zera.

Tak oto przyszedł koniec na Vandermonde'a. A przed braćmi pojawiła się Rezolwenta, cała i zdrowa,

*co było do okazania.*

**Uwaga 1.** Bajka napisana jest dla przypadku  $n_0 = 3$ .

Posługując się metodą indukcji zupełnej Czytelnik bez trudu uogólni ją na przypadek dowolnego  $n \geq 3$ .

**Uwaga 2.** W ogólnym przypadku w drugą stronę bajka nie pójdzie.

*Autor:?*

**Uwaga redaktora:** powyższy tekst jest tłumaczeniem z rosyjskiego (też najwyraźniej przekładu). W swoich starych notatkach nie znalazłem ani nazwiska autora, ani źródła tej bajki. Może ktoś z Czytelników pomoże to ustalić?

*M. Sz.*



**Rozwiązanie zadania M 349.** Niech  $K, L, M$  będą punktami styczności sfery ze ścianami zawierającymi  $A$ . Trójkąt prostokątne  $AKO, ALO$  i  $AMO$  mają wspólny bok  $AO$  i równe promieniowi sfery boki  $KO, LO$  i  $MO$ . Są więc one przystające i ich wysokości poprowadzone z  $K, L, M$  mają wspólny spodek  $S$  leżący wewnątrz  $AO$ . Wynika stąd, że płaszczyzna  $KLM$  przechodzi przez  $S$ , oraz że punkty  $A$  i  $O$  leżą po jej przeciwnych stronach. Powtarzając to rozumowanie dla wierzchołków  $B, C, D$  przekonamy się, że  $O$  leży za każdym razem w półprzestrzeni wyznaczonej przez płaszczyznę przechodzącą przez odpowiednie punkty styczności i nie zawierającej danego wierzchołka. Przecięciem tych półprzestrzeni jest czworościan  $KLMN$  i  $O$  leży wewnątrz tego czworościanu.

## Co by było, gdyby...

Matematyka tym różni się od (pozostałych) nauk przyrodniczych, że wyboru aksjomatów dokonuje się dość dowolnie, a następnie buduje się teorię matematyczną tak, żeby wszystkie konsekwencje i wnioski były zgodne z wybranymi aksjomatami. W naukach przyrodniczych aksjomatami są znane prawa przyrody. Do tego zbioru imponderabiliów niektórzy dodają pewne zasady filozoficzne (nie należące do klasy udowodnionych praw przyrody) oraz czasem pewne hipotezy, których prawdziwości nie można obecnie udowodnić ani obalić.

Chcielibyśmy zaproponować Czytelnikom zabawę — konkurs w opisywanie hipotetycznych światów, w których prawdziwe są inne prawa fizyki niż te znane w naszym Wszechświecie. Na przykład: co by było, gdyby:

- ładunek elektronu równał się połowie ładunku protonu, albo
- masa bezwładna nie była równa masie ciężkiej, albo
- prędkość światła zależała od jego częstości, np.  $c \sim \sqrt{\nu}$ , albo
- życie było oparte na krzemie, albo
- współczynnik załamania powietrza wynosił  $n = 2$ , itd.

Nie chcemy ograniczać Czytelników w doborze założeń. Rozwinięcie powyżej wymienionych przykładowych aksjomatów nie będzie preferowane w stosunku do innych. Forma opisu świata jest dowolna, może to być rozprawa, esej (byle nie za długi!), komiks itd. Najciekawsze, naszym zdaniem, odpowiedzi opublikujemy w *Delcie*, na ich autorów czekają nagrody. Czekamy na Wasze prace do dnia 1 kwietnia 1984 roku.

*Redakcja*