

Przypominamy

Każdy, kto nadeśle pod adresem redakcji rozwiązanie wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — lepiej większą — z naklejonym znaczkiem, otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.

Mizar MSE (4)

W poprzednim odcinku naszkicowaliśmy, jak w Mizarze MSE zapisuje się dowody. Ten opisany już sposób dowodzenia nazywa się dowodzeniem wprost. W przypadku dowodu implikacji zakładamy w nim bowiem najpierw prawdziwość poprzednika i usiłujemy wykazać prawdziwość następnika.

Inna technika dowodzenia to dowód nie wprost, czyli przez sprowadzenie do sprzeczności. Tutaj, w przypadku implikacji po założeniu jej poprzednika zamiast dowodzić następnika, zakładamy „przekornie” jego negację. Jeżeli z takich założeń uda się wywnioskować nieprawdę, to uważamy wyjściową implikację za dowiedzioną. Co to znaczy wywnioskować nieprawdę? W praktyce oznacza to najczęściej wywnioskowanie zdania będącego zaprzeczeniem jednego z poprzednio uzyskanych zdań. By dopełnić formalności w dowodzie, tę wywnioskowaną nieprawdę musimy zaznaczyć odpowiednią konkluzją (w tym odcinku, jak i poprzednio, korzystamy ze wstępu do zadania o liniowym porządku dla ułamków, por. część 2, *Delta* 10/1983).

```
NWCA,BJ & NWCC,DJ IMPLIES NWCA,BJ
PROOF
  ASSUME A: NWCA,BJ AND B: NWCC,DJ;
  ASSUME C: NOT NWCA,BJ;
  THUS CONTRADICTION BY A,C
END;
```

Użyte w konkluzji dowodu słowo **contradiction** jest w Mizarze MSE specjalnie traktowanym symbolem.

Jest ono oznaczeniem pewnego zdania zawsze fałszywego — „reprezentującego” wszystkie zdania fałszywe — takiego „abstrakcyjnego”, „zestandardyzowanego” fałszu. Oczywiście **not contradiction** jest zdaniem zawsze prawdziwym. (Mądrzej, to co jest oznaczane przez **contradiction** jest nazywane stałą logiczną **falsum**, czyli po polsku fałsz. A po angielsku **contradiction** znaczy sprzeczność).

Dowód nie wprost można od razu zacząć od założenia negacji dowodzonego zdania i wykazać, że to prowadzi do sprzeczności.

```
NOT (NWCA,BJ & NWCC,DJ) OR NWCA,BJ
PROOF
  ASSUME A: NOT (NOT (NWCA,BJ & NWCC,DJ) OR NWCA,BJ);
  B: NWCA,BJ & NWCC,DJ BY A;
  C: NOT NWCA,BJ BY A;
  THUS CONTRADICTION BY B,C
END;
```

W taki sposób możemy postępować bez względu na kształt dowodzonego zdania. Weźmy tezę z pierwszego przykładu:

```
NWCA,BJ & NWCC,DJ IMPLIES NWCA,BJ
PROOF
  ASSUME A: NOT (NWCA,BJ & NWCC,DJ IMPLIES NWCA,BJ);
  B: NWCA,BJ & NWCC,DJ & NOT NWCA,BJ BY A;
  THUS CONTRADICTION BY B
END;
```

(Czytelnicy zechcą zauważyć, że we wszystkich powyższych przykładach dowodzone w istocie tego samego).

A jak udowodnić nie wprost tezę zaczynającą się od kwantyfikatora ogólnego? Niestety, w tym miejscu naszego kursu z założenia negacji zdania ogólnego nie potrafimy jeszcze w pełni skorzystać. Zatem, pierwszy krok zrobimy jak w dowodzie wprost. Weźmiemy mianowicie pewien dowolny, ale na czas dowodu ustalony obiekt. Następnie będziemy starali się o nim dowieść tego, co początkowo mieliśmy udowodnić o wszystkich obiektach tego typu. No, a teraz możemy już zastosować techniki dowodu nie wprost do tego, co pozostało udowodnić.

Popatrzmy na przykład (przypominamy, że zdanie ograniczające w kwantyfikatorze ogólnym to w istocie poprzednik pewnej implikacji):

```
FOR X,Y,Z BEING ULAMEK
  ST NWEX,YJ & X<Y & NWZ,XJ
  HOLDS NOT NWCY,ZJ
PROOF
  LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
  A: NWEX,YJ AND B: X<Y AND C: NWZ,XJ;
  ASSUME D: NWCY,ZJ;
  E: NWCY,XJ BY D,C,PRZECHODNIOSC;
  F: X=Y BY A,E,ANTYSYMETRIA;
  THUS CONTRADICTION BY B,F
END;
```

Dowody nie wprost są uważane często za najłatwiejszą formę uzasadniania tezy. Weźmy taki dowód:

```
FOR X,Y,Z BEING ULAMEK ST NOT NWEX,YJ & NOT NWCY,ZJ
  HOLDS X<Z
PROOF LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
  A: NOT NWEX,YJ AND B: NOT NWCY,ZJ;
  ASSUME C: X=Z;
  THUS CONTRADICTION BY A,B,C,SPONJNOSC
END;
```

Jeżeli nie jest jasne, skąd tutaj wynika sprzeczność, to podajemy rozumowanie w drobniejszych krokach. Mając już poczynione założenia *A*, *B* i *C* moglibyśmy ten dowód kontynuować tak:

```
D: NOT NWZ,XJ BY A,C;
E: NWZ,YJ BY B,SPONJNOSC;
THUS CONTRADICTION BY D,E
```

Moduł sprawdzający logiczną poprawność tekstów Mizara MSE (checker) akceptuje oba uzasadnienia. A jaki byłby dowód wprost w tym przypadku?

Na koniec zauważmy, że jeśli już dla pewnej tezy dysponujemy dowodem wprost, to z łatwością możemy przedstawić jej dowód nie wprost. Można również dokonać operacji odwrotnej.

Zadania:

Przedstawić dowód nie wprost dla następujących tez:

```
T11: FOR X,Y,Z BEING ULAMEK
  ST NOT NWEX,YJ & NOT NWCY,ZJ HOLDS NOT NWEX,ZJ
T12: FOR X,Y,Z BEING ULAMEK ST NWEX,YJ & NWCY,ZJ
  HOLDS NOT NWZ,XJ OR X=Z
T13: FOR X,Y BEING ULAMEK ST NWEX,YJ
  HOLDS FOR Z BEING ULAMEK HOLDS NWEX,ZJ OR NWZ,YJ
```