Liga zadaniowa
Wydziału Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu
Warszawskiego
i Redakcji „Delty”

Klub 44

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Zadania nr 70, 71, 72

Termin nadsyłania rozwiązań: 29.02.1984

70. Dane są trzy ciągi skończone liczb rzeczywistych (a_i), (b_i), (c_i), $i=1,\dots,n$, takie, że $a_1<\dots<a_n$, $b_1<\dots<b_n$, a ciąg (c_i) jest nieidentycznościową permutacją ciągu (b_i). Dowieść, że $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i > \sum_{i=1}^{n} a_ic_i$.

71. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło. Udowodnić, że środki kół wpisanych w trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB są wierzchołkami pewnego prostokąta.

72. Dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 3$ znaleźć rozkład liczby 1 na sumę n odwrotności różnych liczb naturalnych.

Zadanie **72** przysłał nasz Czytelnik, pan Włodzimierz Szymczyk z Zielonki koło Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 8/1983

Przypominamy treść zadań:

58. Który wyraz szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ jest — przy ustalonym $x>0$ — największy?

59. Jakim trójkątom ABC przysługuje własność następująca: dla każdego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta można z odcinków AP, BP, CP zbudować trójkąt?

60. Jaka jest maksymalna liczba sposobów, na które liczba naturalna może być przedstawiona jako suma czterech swoich różnych dzielników?

W tym numerze nie podajemy czołówki ligowej. W numerze 1/1984 będzie natomiast dłuższa tabela ligowa.

58. Oznaczmy n-ty wyraz rozpatrywanego szeregu przez z_n. Ponieważ $z_n/z_{n-1}=x/n$, zachodzą implikacje: $n<x \Rightarrow z_{n-1}<z_n$, $\quad n>x\Rightarrow z_{n-1}>z_n$.
Niech $m=[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Jeśli więc $x>m$ (tzn. x nie jest liczbą całkowitą), to $z_1<z_2<\dots<z_{m-1}<z_m>z_{m+1}>z_{m+2}>\dots$, czyli największym wyrazem jest z_m. Jeśli natomiast $x=m$, to wówczas $z_1<z_2<\dots<z_{m-1}=z_m>z_{m+1}>z_{m+2}\dots$, czyli poszukiwane maksimum jest realizowane przez wyrazy o numerach m i $m-1$.

59. Omawiana własność przysługuje jedynie trójkątom równobocznym. Istotnie: wykonajmy obrót płaszczyzny o 60° wokół wierzchołka C trójkąta równobocznego ABC tak, by punkt A przeszedł na punkt B; oznaczając przez Q obraz punktu P otrzymujemy trójkąt PQB, którego boki QB, BP, PQ są równe odcinkom AP, BP, CP. W trójkącie nierównobocznym ABC, w którym np. $AC<BC$, wystarczy wybrać punkt P dostatecznie blisko wierzchołka C, by dostać nierówność $BP>AP+CP$, uniemożliwiającą zbudowanie trójkąta z tych trzech odcinków.

60. Rozkład liczby naturalnej na sumę czterech jej różnych dzielników indukuje rozkład liczby 1 na sumę czterech odwrotności różnych liczb naturalnych:

$$1=\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\qquad k<l<m<n.$$

k musi się równać 2 $\left(\text{w przeciwnym razie napisana suma byłaby niewiększa od } \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}\right)$. l może być równe jedynie 3, 4 lub 5 $\left(\text{bo gdy } l\geqslant 6, \text{ rozważana suma jest niewiększa od } \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{157}{168}\right)$. Przy l równym odpowiednio 3, 4, 5 dostajemy analogicznie oszacowania: $m\leqslant 11$, $m\leqslant 7$, $m\leqslant 6$. Analizując poszczególne możliwości stwierdzamy, że badane równanie spełniają następujące czwórki liczb (k,l,m,n):
(2, 3, 7, 42), (2, 3, 8, 24), (2, 3, 9, 18), (2, 3, 10, 15), (2, 4, 5, 20), (2, 4, 6, 12).
Zatem dowolna liczba naturalna N może być zapisana jako suma czterech różnych dzielników na nie więcej niż sześć sposobów. Najmniejsza liczba N mająca sześć takich przedstawień — to najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich otrzymanych mianowników k, l, m, n: $N=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2520$.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA