Czy umiemy obliczać pierwiastek kwadratowy?

Jerzy GERESZ

Większość czytelników na takie zapytanie wzruszy ramionami: uczyliśmy się w szkole procedury numerycznego obliczania pierwiastka z danej liczby. Procedura ta umożliwia obliczenie pierwiastka z dowolną dokładnością. Ale problem polega na tym, czy umiemy obliczenie to przeprowadzić w sposób ekonomiczny — kosztem możliwie małego nakładu pracy. By problem ten zilustrować, rozpatrzmy przykład wyciągania pierwiastka z dokładnością siedmiu cyfr znaczących z liczby, którą znamy z taką samą dokładnością (rachunki na marginesie).

```
√2,718282 = 1,648721
 1
 171 : 26×6
 156
   1582 : 324×4
   1296
     28682 : 3288×8
     26304
  →    2378|00 : 32967×7
       2307|69
          70|3100 : 329742×2
          65|9484
           4|361600 : 3297441×1
           3|297441
           1|064159
```

Od Redakcji: Autor stosuje uproszczoną procedurę przybliżonego dzielenia. Sprawdzenie jej poprawności pozostawiamy Czytelnikom.

Zera na wysokości strzałki na prawo od pionowej linii przerywanej zostały wpisane tu zastępczo, wobec naszej nieznajomości cyfr na siódmym i ósmym miejscu po przecinku liczby podpierwiastkowej. W konsekwencji fikcyjne są wszystkie cyfry różnic na prawo od linii przerywanej.

Jak widać, blisko połowa pracy rachunkowej odbywała się na cyfrach fikcyjnych i w istocie była ona zbędna. Ostatnie trzy cyfry wyniku uzyskalibyśmy te same, gdyby wszystkie cyfry na prawo od linii przerywanej w poszczególnych różnicach zostały zastąpione zerami. Co więcej, w części na lewo od linii przerywanej cały proces rachunkowy nie różni się zasadniczo od dzielenia zaznaczonej strzałką różnicy przez podwojony wynik dotychczasowego pierwiastkowania (o czterech cyfrach znaczących). By to unaocznić, przedstawiliśmy obok takie dzielenie, którego wynikiem są ostatnie trzy cyfry znaczące poszukiwanej wartości pierwiastka.

```
        721
 2378|0 : 3296
 2307|2
   70|8 : 330
   66|0
    4|8 : 33
    3|3
    1|5
```

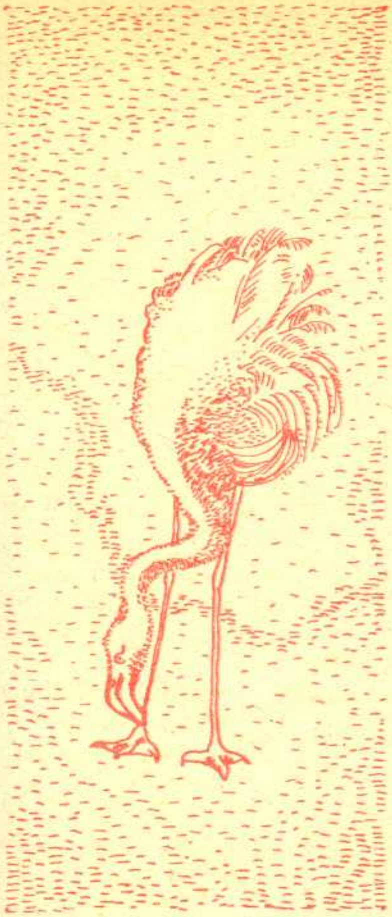
Obserwacja powyższa sugeruje, by jako najbardziej ekonomiczną metodę obliczania pierwiastka z zadaną dokładnością przyjąć co następuje: Pierwszą część obliczenia wykonujemy w sposób tradycyjny aż do wyczerpania cyfr znaczących liczby podpierwiastkowej Z chwilą, gdy w grę zaczynają wchodzić nieznaczące zera, dalsze cyfry pierwiastka obliczamy dzieląc ostatnią różnicę (z ewentualnie dopisanym zerem nieznaczącym) przez podwojoną wartość dotychczas uzyskanego przybliżenia pierwiastka. Zilustrujemy to przykładem (rachunki na marginesie).

```
√1,6487213 = 1,284
 1
   64 : 22×2
   44
   2087 : 248×8
   1984
     10321 : 2564×4
     10256
        65
```

Do 65 dopisujemy teraz 30 (gdzie końcowe zero jest już nieznaczące), i dalszy rachunek wykonujemy jako dzielenie 6530 : 2568. Ostatecznie otrzymujemy (rachunki na marginesie).

```
√1,6487213 = 1,2840254
 1
   64 : 22×2
   44
   2087 : 248×8
   1984
     10321 : 2564×4
     10256
          6530 : 2568
          5136
          1394 : 257
          1285
           109 : 26
           104
             5 : 3
```

Zajmiemy się teraz przedstawioną metodą w sposób bardziej właściwy matematykowi, którego interesuje przede wszystkim jej logiczne uzasadnienie i dowód jej poprawności. Oznaczmy przez N liczbę podpierwiastkową, przez x_1 już uzyskane przybliżenie liczby $\sqrt{N}$. Oznaczmy przez ε różnicę $\sqrt{N}-x_1$, spełnia ona równanie $x_1^2+2x_1\varepsilon+\varepsilon^2 = N$. Przyjmijmy, że x_1 przybliża $\sqrt{N}$ z dokładnością do jednej cyfry po przecinku, czyli $|\sqrt{N}-x_1| < 0{,}1$, w konsekwencji $\varepsilon^2 = (\sqrt{N}-x_1)^2 < 0{,}01$. Jeżeli teraz przez ε będziemy rozumieć wartość poprawki na x_1 odpowiadającej dopisaniu drugiej cyfry po przecinku, to w równaniu $x_1^2+2x_1\varepsilon+\varepsilon^2 = N$ możemy pominąć składnik ε^2, czyli na ε otrzymujemy równanie przybliżone $x_1^2+2x_1\varepsilon = N$, którego rozwiązanie jest $\varepsilon = \dfrac{N-x_1^2}{2x_1}$.



W ten sposób uzyskujemy kolejne, lepsze przybliżenie x_2 postaci:

$$x_2 = x_1 + \frac{N-x_1^2}{2x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{x_1} + x_1\right).$$

Tym razem mamy $|\sqrt{N}-x_2| < 0{,}01$, czyli $(\sqrt{N}-x_2)^2 < 0{,}0001$, a więc przedstawioną konstrukcję możemy powtórzyć uzyskując trzecie, jeszcze lepsze przybliżenie $\sqrt{N}$:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{x_2} + x_2\right).$$

Możemy w ten sposób uzyskać nieskończony ciąg coraz lepszych przybliżeń $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$
według schematu

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{x_k} + x_k\right).$$

Nietrudno zauważyć, że tradycyjny algorytm zastosowany w przedstawionym wyżej pierwszym przykładzie jest to wielokrotne stosowanie przejścia $x \to x + \dfrac{N-x^2}{2x}$, z tą różnicą, że za każdym razem iloraz $\dfrac{N-x^2}{2x}$ jest brany z dokładnością do jednej cyfry znaczącej. W ten sposób dla uzyskania ośmiu cyfr znaczących potrzebowaliśmy stosować powyższe przejście aż siedmiokrotnie.

Proponowane tu usprawnienie polega na tym, by ostatni iloraz $\dfrac{N-x^2}{2x}$ brać z większą liczbą cyfr znaczących: w konkretnym wyżej przedstawionym przykładzie obliczyliśmy ostatni iloraz z dokładnością aż czterech cyfr znaczących uzyskując poprawny wynik. Poniższe stwierdzenie uzasadnia poprawność takiego postępowania.

Jeżeli x_1 jest przybliżeniem $\sqrt{N}$ o k cyfrach znaczących, przy czym $k \geqslant 1$, to $x_2 = x_1 + \dfrac{N-x_1^2}{2x_1}$ jest przybliżeniem tego pierwiastka lepszym od pierwszego o co najmniej $(k-1)$ cyfr znaczących.

Dowód. W ogólnym przypadku ilość cyfr znaczących przybliżenia liczby n jest to część całkowita liczby $\log\left|\dfrac{5n}{n-x}\right|$, gdzie podstawą logarytmu jest 10. W naszym przypadku potrzebujemy zatem zbadać zależność między liczbami $\log\left|\dfrac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1}\right|$ oraz $\log\left|\dfrac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_2}\right|$. Otóż mamy

$$\log\left|\frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_2}\right| = \log\left|\frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1-\dfrac{N-x_1^2}{2x_1}}\right| = \log\left|\frac{5\sqrt{N}}{(\sqrt{N}-x_1)\left(\dfrac{2x_1-\sqrt{N}-x_1}{2x_1}\right)}\right| =$$

$$= \log\left|\left(\frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1}\right)^2 \cdot \frac{2x_1}{5\sqrt{N}}\right| = 2\log\left|\frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1}\right| + \log\left|\frac{2x_1}{5\sqrt{N}}\right| =$$

$$= 2\log\left|\frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1}\right| + \log\left(\frac{2}{5}\cdot\left|1-\frac{\sqrt{N}-x_1}{\sqrt{N}}\right|\right).$$

Ponieważ $k \geqslant 1$, więc $\left|\dfrac{\sqrt{N}-x_1}{\sqrt{N}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4}$, czyli składnik $\log\left(\dfrac{2}{5}\left|1-\dfrac{\sqrt{N}-x_1}{\sqrt{N}}\right|\right)$ będzie większy od -1.
Otrzymaliśmy zatem nierówność

$$\log\left|\frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_2}\right| \geqslant 2\log\left|\frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1}\right| - 1,$$

która będzie dotyczyła również części całkowitych logarytmów po obu stronach. Dowód jest zakończony.

Tym samym pokazaliśmy również, że ciąg o wyrazach $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{x_k} + x_k\right)$ startujący z x_1 dostatecznie bliskiego $\sqrt{N}$ jest zbieżny do $\sqrt{N}$ (faktycznie zbiega on do $\sqrt{N}$ przy jakimkolwiek x_1).

Z udowodnionego stwierdzenia wynika, że dla uzyskania n cyfr znaczących $\sqrt{N}$ wystarcza wykonać k dzieleń $\frac{N-x^2}{2x}$, gdzie $k = \frac{n}{2}$, gdy n jest parzyste, a $k = \frac{n-1}{2}$, gdy n nieparzyste, bowiem k-ty krok daje przybliżenie $\sqrt{N}$ o n cyfrach znaczących, a to jest równoznaczne z przyjęciem opisanej wyżej metody. Co więcej, należałoby stosować tę metodę nie tylko w odniesieniu do liczby podpierwiastkowej N danej z dokładnością n cyfr znaczących, ale w każdym przypadku, w którym chodzi o uzyskanie n cyfr znaczących liczby $\sqrt{N}$, na przykład przy obliczaniu $\sqrt{2}$.

Niektórzy Czytelnicy być może uznają zajmowanie się problemami obliczeń numerycznych tego typu jak wyżej za przeżytek. Któż rozsądny będzie się kopał w jakichś tam rachunkach, skoro mamy do dyspozycji komputery i to już trzeciej generacji? Otóż należy wyjaśnić jedno zasadnicze nieporozumienie: nawet najlepsze z istniejących komputerów nie mają nic wspólnego z „mózgami elektronowymi" z powieści science-fiction, myślącymi za nas i samodzielnie rozwiązującymi problemy. Komputer jest to martwe narzędzie, bezmyślnie wykonujące program napisany przez człowieka. Różnica między tradycyjnymi rachunkami na kartce papieru a obliczeniami techniką elektronową jest w istocie taka, że wypisaniu cyferki na papierze odpowiada umieszczenie odpowiedniej informacji w odpowiedniej komórce pamięci operacyjnej. Problem matematyczny sposobu przeprowadzenia obliczenia pozostaje ten sam. Troska o wybór ekonomicznej metody obliczenia należy do człowieka programującego maszynę. A problem ekonomii obliczeń jest istotny: maszyna co prawda liczy szybko, ale jej czas pracy kosztuje dużo — gospodarować należy nim oszczędnie.

Zadania

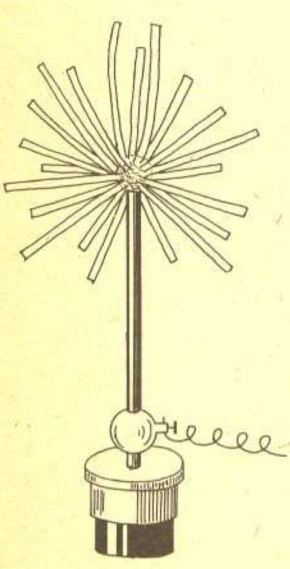
Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 346. Transpozycją (k, l) zbioru $\{1, \ldots, n\}$ nazywamy taką permutację t, że $t(k) = l$, $t(l) = k$, $t(i) = i$ dla $i \neq k, l$. Wykazać, że dowolną permutację p tego zbioru możemy otrzymać składając w odpowiednim porządku (z ewentualnymi powtórzeniami) transpozycje $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$.
Rozwiązanie na str. 3

M 347. Wykazać, że $n-2$ transpozycji nie wystarczy, by przez ich składanie uzyskać wszystkie permutacje zbioru $\{1, \ldots, n\}$.
Rozwiązanie na str. 15

M 348. Wykazać, że dowolną permutację zbioru $\{1, \ldots, n\}$ można otrzymać składając (z ewentualnymi powtórzeniami) transpozycję $t = (1, 2)$ i permutację cykliczną c $(c(1) = 2, c(2) = 3, \ldots, c(n-1) = n, c(n) = 1)$.
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ



F 142. Do pokazów z elektrostatyki używany bywa przyrząd zwany „pióropuszem". Jest to metalowa kula z przyklejonymi listkami cynfolii zamocowana na izolującej podstawie. Po wprowadzeniu ładunku listki ustawiają się zgodnie z przebiegiem linii sił przewodnika sferycznego (patrz rysunek). Paski cynfolii mają jednak stały potencjał. Czyżby więc w tym przypadku linie natężeń pola elektrostatycznego nie były prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych?
Rozwiązanie na str. 13

F 143. Energia elektrostatycznego oddziaływania dwóch różnoimiennych ładunków jest ujemna. Energia pola elektrostatycznego wytworzonego przez ten układ jest z pewnością dodatnia, gdyż gęstość energii jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola. Skąd taka rozbieżność?
Rozwiązanie na str. 10