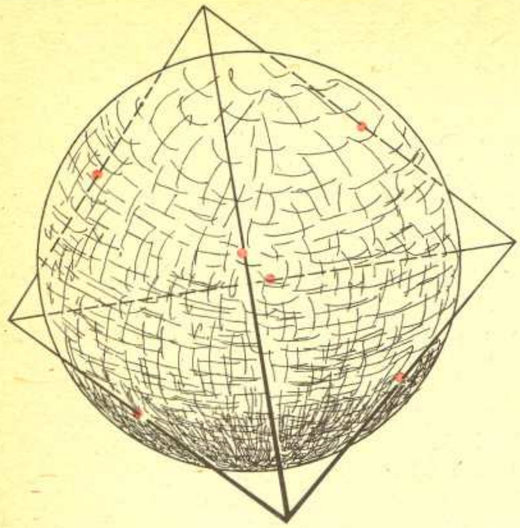
Czworościan i sfery

Dr Jerzy BEDNARCZUK



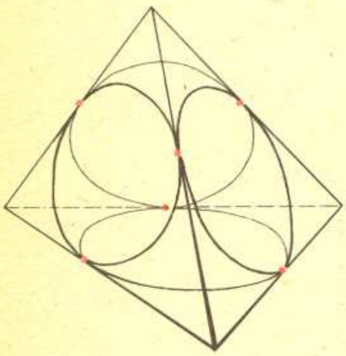
Rys. 1

Czy dla każdego czworościanu można zbudować taką sferę, by była ona styczna do każdej jego krawędzi (rys. 1)?
Przez czworościan rozumiemy oczywiście dowolny ostrosłup o podstawie trójkątnej.
Nie da się ukryć, że nie z każdym czworościanem ta sztuka nam się uda. A z którymi? Jak to możliwie najprościej sprawdzić? Jest wiele sposobów. Podamy tu trzy.

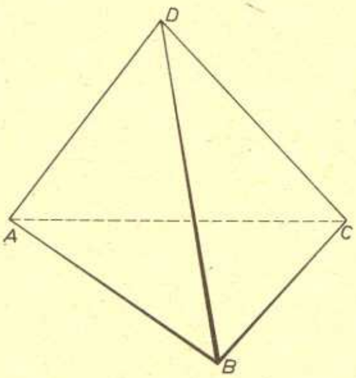
Równoważne są mianowicie na przykład następujące warunki:
(1) Dla danego czworościanu istnieje sfera styczna do jego wszystkich krawędzi.
(2) Okręgi wpisane w ściany czworościanu są parami styczne (rys. 2).
(3) Istnieją cztery, parami styczne sfery o środkach w wierzchołkach czworościanu.
(4) Sumy długości trzech par skośnych krawędzi czworościanu są równe, czyli $AB+CD = AC+BD = AD+BC$ (rys. 3).
Przytoczone kryteria są dość wygodne w użyciu. Wypadałoby je jednak udowodnić.

Wszystkie wynikania „na dół", czyli (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) są w zasadzie oczywiste. Wystarczy zatem udowodnić wynikanie (4) ⇒ (1).

Dowód opiera się na prostym fakcie: jeśli mamy okrąg wpisany w kąt, to odcinki PA i PB są przystające (rys. 4).
W konsekwencji, jeśli mamy okrąg wpisany w trójkąt ABC, to otrzymujemy tu trzy pary odcinków przystających (rys. 5).

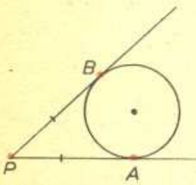


Rys. 2

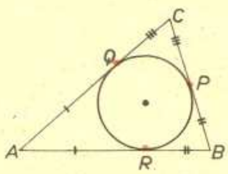


Rys. 3

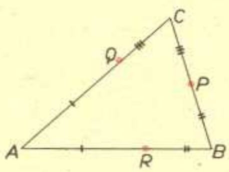
Zauważmy, że jest i odwrotnie: jeśli punkty P, Q, R, należące odpowiednio do boków trójkąta ABC, dzielą te boki na odcinki odpowiednio przystające (rys. 6), to punkty te są punktami styczności boków trójkąta do okręgu wpisanego (rys. 5). Gdyby bowiem na przykład punkt R przesunąć nieco w stronę punktu A, to i punkt Q też należałoby przesunąć ku punktowi A, bo wszak odcinki AR i AQ powinny być przystające. Wtedy jednak punkt P należałoby, z tego samego powodu, z jednej strony przesunąć ku punktowi B, z drugiej zaś strony — ku punktowi C, co jest raczej niemożliwe.



Rys. 4

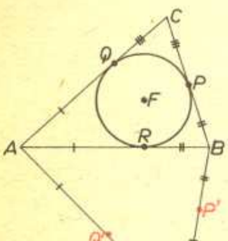


Rys. 5

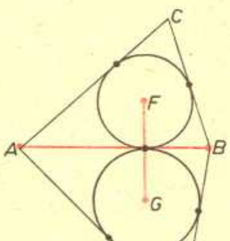


Rys. 6

Weźmy teraz dowolny trójkąt ABC i niech punkty P, Q, R będą punktami styczności jego boków do okręgu wpisanego. Weźmy też trójkąt ABD, taki, by $AD+BC = AC+BD$. Odłóżmy na bokach AD i BD odcinki, jak na rysunku 7. Wówczas $DQ'' = DP''$. Wobec tego punkty R, Q', P' są punktami styczności boków trójkąta ABD do okręgu weń wpisanego. W rezultacie otrzymujemy, że prosta AB jest prostopadła do prostej FG (rys. 8). Fakt ten nie ulegnie zmianie, nawet jeśli zaczniemy trójkąt ABD obracać wokół prostej AB i trójkąty ABC i ABD będą leżały w różnych płaszczyznach. Wtedy jednak proste prostopadłe odpowiednio do tych płaszczyzn, poprowadzone przez punkty F i G przetną się (rys. 9).



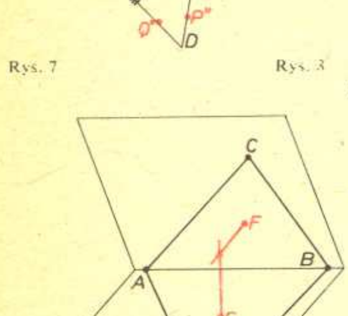
Rys. 7



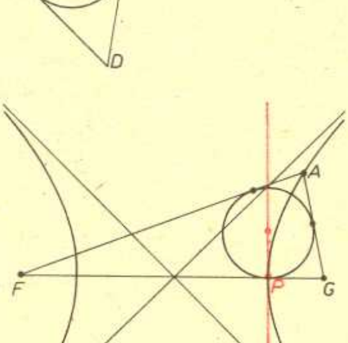
Rys. 8

I to już w zasadzie wszystko, bo stąd wynika, że jeśli mamy czworościan spełniający warunek (4), to proste prostopadłe do jego ścian, poprowadzone odpowiednio przez środki okręgów wpisanych w te ściany, spotykają się w jednym punkcie. I punkt ten, jako jednakowo oddalony od wszystkich krawędzi czworościanu, będzie środkiem poszukiwanej przez nas sfery.

I na koniec zadanie — zadanie, które w pierwszej chwili może się wydać nie związane z omawianymi powyżej faktami:
Dana jest hiperbola o ogniskach F i G. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty FGA, gdzie punkt A jest dowolnym punktem jednego z ramion hiperboli, leżą na prostej stycznej do tego ramienia hiperboli w jego wierzchołku P (rys. 10).



Rys. 9



Rys. 10