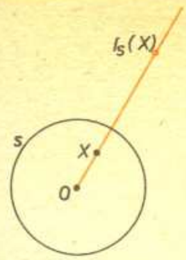
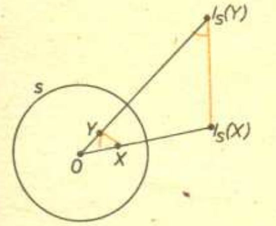
Inwersje



Przez I_s, gdzie s jest okręgiem o środku O i promieniu r rozumieć będziemy przekształcenie płaszczyzny bez punktu O na nią samą, spełniające następujący warunek:

Dla dowolnego, różnego od O, punktu X punkt $I_s(X)$ leży na półprostej OX i $OX \cdot OI_s(X) = r^2$.

Przekształcenie to nazywa się *inwersją* względem okręgu s, a czasem też *symetrią* względem s. Ta ostatnia nazwa bierze się stąd, że jest to *inwolucja* — czyli $I_s(I_s(X)) = X$ — tak jak i symetrie.

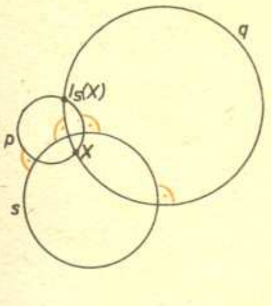


Dla badania inwersji dogodnie jest używać nazwy *łańcuch*, która tu będzie oznaczać zarówno prostą, jak i okrąg. Otóż inwersje przeprowadzają łańcuchy w łańcuchy (oczywiście ewentualnie bez punktu O).

Aby to udowodnić, dogodnie jest skorzystać z następującego lematu

$$\measuredangle\, OXY = \measuredangle\, OI_s(Y)I_s(X).$$

Ci z Czytelników, którzy nie umieją (bądź nie chcą) przeprowadzić dowodu, znajdą go w numerze. W innym miejscu jest też podany (oznaczony numerem 1) szkic dowodu, że obrazem łańcucha jest łańcuch. Ciekawym problemem jest też stwierdzenie, jakie łańcuchy przy I_s przechodzą na siebie (choć, być może, ich punkty się przemieszczają). A oto odpowiedź:



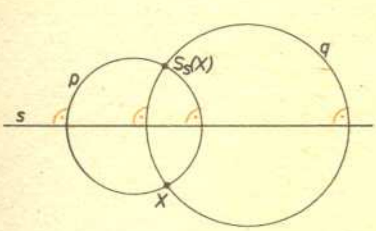
Łańcuch przechodzi na siebie przy I_s, gdy jest to s, bądź jest on do s *ortogonalny* (co oznacza przecinanie się linii pod kątem prostym).

Szkic dowodu (z numerem 2) gdzieś w numerze. Warto się o tym przekonać, albowiem można dzięki powyższemu twierdzeniu określić I_s bez używania O i r^2 — tylko za pomocą s:

Jeśli ortogonalne do s łańcuchy p i q przechodzą przez X, to ich drugim punktem przecięcia jest $I_s(X)$.

Istotnie, jeśli $X \in p \cap q$, to $I_s(X) \in I_s(p) \cap I_s(q)$, ale wobec ortogonalności $I_s(p) = p$ i $I_s(q) = q$.

Zauważmy, że nasza druga definicja obejmuje obok inwersji także symetrie osiowe.



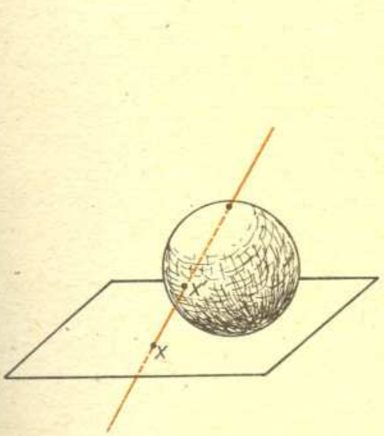
Przy inwersji bardzo bliskie siebie punkty mogą się znaleźć ogromnie daleko (np. gdy leżą tuż, ale po przeciwnych stronach O). Jeżeli to się nam nie podoba, można złu zaradzić traktując inwersję na płaszczyźnie jako płaski obraz pewnego przekształcenia sfery (czyli powierzchni kuli), które też zresztą jest nazywane inwersją. W tym celu należy umieć zręcznie przekształcać płaszczyznę na sferę i sferę na płaszczyznę.

Stosowną metodą jest *rzut stereograficzny*.
Dokonuje się go przez postawienie na płaszczyźnie sfery i ustalenie, że punkt X płaszczyzny i punkt X' sfery odpowiadają sobie, gdy można przez nie poprowadzić prostą przechodzącą przez najdalszy od płaszczyzny punkt sfery.

Rzut stereograficzny jest *wiernokątny*, co oznacza, że odpowiadające sobie linie na płaszczyźnie i na sferze przecinają się pod tym samym kątem (szkic dowodu w numerze, oznaczony 3). Ponadto łańcuchom odpowiadają na sferze okręgi (szkic dowodu oznaczony jest 4).

Wobec tego nasza druga definicja inwersji da nam, zastosowana do sfery, to samo co przeniesienie inwersji z płaszczyzny na sferę. Nawet coś lepszego — punkt O też będzie mógł być przekształcony i jego obrazem okaże się najwyższy punkt sfery. Co więcej — teraz bliskie punkty będą przez inwersję przekształcane na bliskie. A symetrii osiowych nie będzie można odróżnić od „normalnych" inwersji.

Ze względu na te udogodnienia chciałoby się sytuację ze sfery przenieść na płaszczyznę. W tym celu należałoby dodać do płaszczyzny „dodatkowy" punkt odpowiadający, z założenia, najdalszemu punktowi sfery i „zamykający" wobec tego wszystkie proste. Po wykonaniu tego uzupełnienia łańcuchy będą wszystkie jednakowe, inwersje nie będą odróżnialne od symetrii osiowych. Taki system geometryczny nazywany jest geometrią Möbiusa.



A teraz pytanie: nie mamy wątpliwości, że inwersje na sferze są przekształceniami ciągłymi; czy (nieuzupełnione) inwersje na płaszczyźnie też są ciągłe?

A dla tych, których zainteresowały inwersje, dwa trudniejsze problemy (bez rozwiązania w numerze):

1. Wykazać, że inwersje są wiernokątne.
2. Wykazać, że każdy punkt, który można skonstruować z danych punktów cyrklem i linijką, może być skonstruowany samym cyrklem.