Niektóre symbole używane w Mizarze są skrótami pewnych angielskich zwrotów. Po polsku można czytać je tak:

not	nieprawda, że
or	lub
iff	wtedy i tylko wtedy
implies	jeśli..., to
for	dla każdego
being	będący
holds	zachodzi
st	spełniający (albo: taki, że)
ex	istnieje
environ	otoczenie (wstęp)

Mizar — MSE (1)

Dr A. Trybulec w *Delcie* (7/1983) obiecał Czytelnikom krótki kurs Mizara. Oto pierwszy z dziesięciu odcinków spełniających tę obietnicę.

Co to jest Mizar? Pewną odpowiedź daje na to wspomniany wyżej artykuł. Ogólnie chodzi o to, by komputer sprawdzał dowody matematyczne przygotowane przez człowieka. Podstawą systemu, który do tego służy, jest pewien (formalny) język, w którym zapisujemy takie dowody.

W projekcie Mizar opracowano wiele różnych języków, w których można zapisywać dowody matematyczne. Ten, który będziemy omawiać, nazywa się Mizar-MSE, jest mniej skomplikowany od pozostałych i pomyślany został właśnie dla początkujących.

Mizar-MSE obejmuje sobą klasyczny rachunek predykatów z równością. Tym, którzy nie wiedzą, co znaczy poprzednie zdanie, możemy polecić lekturę znakomitej książki A. Grzegorczyka „Zarys logiki matematycznej", ale i bez znajomości książek o logice można będzie zapoznać się z Mizarem bez kłopotu, co najwyżej z pewnym wysiłkiem.

W dalszym ciągu tego kursu będziemy powoływali się na różne elementarne teorie matematyczne, na ogół dobrze wszystkim znane. Czytelnicy będą mogli (jeśli zechcą) rozwiązywać zadania, a Ci, którzy nadeślą rozwiązania, otrzymają wydruk z komputera, będący wynikiem sprawdzenia ich rozwiązania przez maszynę. Jeśli w rozwiązaniu będą błędy lub maszyna przyzna, że sprawdzenie tekstu przekracza jej możliwości, to oczywiście zaznaczy to w pewien sposób. Ale do tego jeszcze wielekroć wrócimy.

Zaczniemy od budowy zdań w Mizarze-MSE. Najprostszymi zdaniami są zdania atomowe. I tutaj mamy do czynienia z pewnym ubóstwem. Zasadniczo jedyną postacią takich zdań jest: symbol predykatu [argument $_1$, argument $_2$, ..., argument $_k$]. Nie możemy zatem napisać $1 < 2$, ale możemy to samo w naszym języku wyrazić przez: mniejszy [1, 2]. Albo np. LT [1, 2] (LT od angielskiego Less Than). 1 i 2 to argumenty predykatu. Predykat może mieć dowolnie dużo argumentów, w praktyce nie spotyka się więcej niż, powiedzmy, dziesięć (na ogół mniej). Predykat może mieć jeden argument, np: dodatnie [4]. Przy zgodnej z intuicją interpretacji znaczenia predykatu dodatnie, powyższe zdanie atomowe jest prawdziwe, rzeczywiście 4 jest liczbą dodatnią, ale np.: dodatnie [0] nie jest zdaniem prawdziwym. Dozwolone są również predykaty bez argumentów, ale wtedy chodzi na ogół o sytuację w pewnym sensie wyjątkową.

W Mizarze można wyrazić fakt, że dwa obiekty są równe, np.: 2 = 2 i takie zdania zapisujemy zwyczajnie. Jest to też zdanie atomowe, symbolem predykatu jest =, ale umieszczamy go między argumentami. Podobnie z nierównością, z tym że symbolem predykatu jest < >, np.: 3 < > 7. Możemy oczywiście napisać 2 < > 2, ale jest to zdanie fałszywe.

Wyjątkowo w tym pierwszym odcinku podamy na marginesie sens (a nie tłumaczenie wyraz za wyrazem) zapisanych w Mizarze zdań.

Wiedząc jak buduje się zdania atomowe, możemy przejść do zdań złożonych, które budujemy ze zdań atomowych za pomocą spójników zdaniowych. W Mizarze możemy używać następujących spójników:

— negacja, zapisywana jako **not** przed negowanym zdaniem np.:

```
NOT LT[3,2];   NOT 2=3
```

3 nie jest mniejsze od 2, 2 nie jest równe 3.

— koniunkcja, zapisywana znakiem & między zdaniami, np.:

```
DODATNIE[1] & LT[0,1]
```

1 jest dodatnie i 0 jest mniejsze od 1.

— alternatywa, zapisywana przez **or** między zdaniami, np:

```
LT[0,1] OR LT[1,0]
```

0 jest mniejsze od 1 lub 1 jest mniejsze od 0.

— implikacja, zapisywana **implies** między poprzednikiem i następnikiem, np:

```
LT[0,7] IMPLIES DODATNIE[7]
```

Jeśli 0 jest mniejsze od 7, to 7 jest dodatnie.

— równoważność, zapisywana przez **iff**, np.:

```
LT[0,7] IFF DODATNIE[7];   NOT 2=3 IFF 2<>3
```

0 jest mniejsze od 7 wtedy i tylko wtedy, gdy 7 jest dodatnie.

Możemy (a czasami musimy) używać okrągłych nawiasów przy budowaniu zdań bardziej złożonych. Ciąg zdań atomowych albo dowolnych zdań w nawiasach możemy napisać bez dodatkowych nawiasów. Np:

```
LT[1,2] & LT[2,3] & LT[3,4] & LT[4,5];

LT[6,7] OR LT[7,8] OR (LT[8,9] IMPLIES NOT LT[9,8])
```

1 jest mniejsze od 2 i 2 jest mniejsze od 3 i 3 jest mniejsze od 4 i 4 jest mniejsze od 5, 6 jest mniejsze od 7 lub 7 jest mniejsze od 8 lub też jeśli 8 jest mniejsze od 9, to 9 nie jest mniejsze od 8 — w drugim zdaniu widać, że w Mizarowym zapisie lepiej widać o co chodzi.

Koniunkcja jest najmocniej wiążącym spójnikiem. Następujące zdanie:

```
LT[1,2] & LT[2,3] OR LT[3,2] & LT[2,1]
```

należy rozumieć:

```
(LT[1,2] & LT[2,3]) OR (LT[3,2] & LT[2,1])
```

Implikacja i równoważność są spójnikami wiążącymi dokładnie dwa zdania, z których każde może być zdaniem atomowym, ciągiem koniunkcji lub też dowolnym zdaniem ujętym w nawiasy. Niepoprawne jest zatem zdanie:

```
LT[5,6] IFF DODATNIE[6] IMPLIES DODATNIE[5]
```

i musimy wstawić nawiasy, by wskazać, co jest argumentem którego spójnika.
W Mizarze możemy używać obu kwantyfikatorów: ogólnego i szczegółowego. Najprostsza postać kwantyfikatora ogólnego wygląda tak np.:

```
FOR X BEING LICZBA
   HOLDS LT[X,0] OR DODATNIE[X] OR X=0
```

Dowolna liczba x jest mniejsza od 0, dodatnia lub równa 0.

To co występuje po **holds** jest zdaniem i nazywa się zasięgiem kwantyfikatora. Wprowadzona zmienna związana (oznaczona x) jest określonego typu, mianowicie jest liczbą. Kwantyfikator może wiązać więcej zmiennych, które mogą być różnych typów np.:

```
FOR X,Y BEING LICZBA, Z BEING ZBIORLICZB
   HOLDS X=Y & JESTW[X,Z] IMPLIES JESTW[Y,Z]
```

Dla dowolnych liczb x i y oraz dla dowolnego zbioru liczb z jeśli $x = y$ i x jest elementem z, to y też jest elementem z.

Ostatnie zdanie możemy zapisać w postaci kwantyfikatora ograniczonego:

```
FOR X,Y BEING LICZBA, Z BEING ZBIORLICZB
   ST X=Y & JESTW[X,Z] HOLDS JESTW[Y,Z]
```

Dla dowolnych równych liczb x i y i dowolnego zbioru z, którego x jest elementem, zachodzi $y \in z$.

Zdanie występujące po **st** jest ograniczeniem obowiązywania kwantyfikatora. Takie ograniczenie może być wyeliminowane przez przeniesienie go do zasięgu kwantyfikatora jako poprzednika implikacji (por. dwa ostatnie zdania z kwantyfikatorami).

A oto przykład, jak zapisujemy kwantyfikator szczegółowy:

```
EX X BEING LICZBA ST DODATNIE[X]
```

Istnieje liczba dodatnia x.

Zdanie występujące po **st** stanowi zasięg tego kwantyfikatora. Również kwantyfikator szczegółowy może wiązać więcej zmiennych.
Np.:

```
EX X,Y BEING LICZBA ST LT[X,Y]
```

Istnieją takie liczby x i y, że $x < y$.

W przypadku, gdy zasięgiem kwantyfikatora ogólnego jest zdanie rozpoczynające się kwantyfikatorem (dowolnym), to symbol **holds** możemy opuścić, np.:

```
FOR X,Y BEING PROSTA
   EX Z BEING PUNKT ST NA[Z,X] & NA[Z,Y]
```

Dowolne dwie proste mają punkt wspólny.

Wróćmy teraz do konstruktorów zdań atomowych, czyli do predykatów. W Mizarze-MSE nie przewiduje się konieczności oddzielnego wprowadzenia predykatów przez np. zapowiadanie, jakich predykatów będziemy używać. Dwa używane predykaty są różne, jeśli zachodzi co najmniej jeden z poniższych warunków:
— mają różny symbol predykatu,
— różnią się liczbą argumentów,
— co najmniej dwa odpowiadające sobie według kolejności argumenty są różnych typów, np.: jeden jest liczbą, a drugi punktem.

Dla rozwiania wątpliwości podamy przykład.
Predykat użyty w zdaniu:

```
FOR X,Y BEING LICZBA HOLDS R[X,Y]
```

jest różny od predykatu użytego w poniższym zdaniu:

```
FOR X BEING LICZBA, Y BEING PROSTA HOLDS R[X,Y]
```

Pisząc jakikolwiek tekst matematyczny (np. artykuł) na ogół przyjmujemy w punkcie wyjścia pewne fakty za ustalone (aksjomaty lub twierdzenia już znane w pewnej dziedzinie) i na ich podstawie prowadzimy nasz wywód. W Mizarze przewidziano tę sytuację. Założenia do tekstu piszemy we wstępie po słowie **environ**. Założenia te nie są sprawdzane pod względem zasadności, a jedynie pod względem zgodności z regułami budowy zdań. Kolejne założenia we wstępie oddzielamy znakiem „;" i nadajemy im nazwy. Podamy przykład takiego wstępu dla geometrii Euklidesa na płaszczyźnie.

Wstęp rozpoczęty przez **environ** kończy się słowem **begin**, które z kolei rozpoczyna tekst zasadniczy. W jaki sposób piszemy ten tekst, podamy w następnych dziewięciu odcinkach. W nim bowiem zapisujemy nasze rozumowanie, dowody etc.

```
ENVIRON

AKSJOMAT1:
  FOR L BEING PROSTA
     EX A,B BEING PUNKT ST A<>B & NA[A,L] & NA[B,L];

AKSJOMAT2:
  FOR A,B BEING PUNKT
     EX L BEING PROSTA ST NA[A,L] & NA[B,L];

AKSJOMAT3:
  FOR A,B BEING PUNKT ST A<>B
     EX L BEING PROSTA
       ST NA[A,L] & NA[B,L] &
          (FOR L1 BEING PROSTA ST NA[A,L1] & NA[B,L1]
               HOLDS L=L1);

AKSJOMAT4:
  EX A,B,C BEING PUNKT
    ST NOT (EX L BEING PROSTA ST NA[A,L] & NA[B,L] & NA[C,L]);

AKSJOMAT5:
  FOR L BEING PROSTA, A BEING PUNKT ST NOT NA[A,L]
     EX L1 BEING PROSTA
       ST NA[A,L1] &
          NOT (EX B BEING PUNKT ST NA[B,L] & NA[B,L1]) &
          (FOR L2 BEING PROSTA
               ST NA[A,L2] &
                  NOT (EX C BEING PUNKT ST NA[C,L2] & NA[C,L])
                 HOLDS L2=L1)
```

aksjomat 1: Na każdej prostej leżą (co najmniej) dwa punkty.
aksjomat 2: Przez każde dwa punkty przechodzi prosta.
aksjomat 3: Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.
aksjomat 4: Istnieją trzy niewspółliniowe punkty.
aksjomat 5: Przez punkt poza prostą przechodzi dokładnie jedna prosta z nią rozłączna.

A teraz ZADANIA:
Podać zapisane w Mizarze-MSE wstępy do następujących teorii:

1. Teoria liniowego porządku dla ułamków.
Relacją porządkującą niech będzie relacja niewiększości opisywana przez dwuargumentowy predykat. Zapisać, że relacja ta jest zwrotna, przechodnia, antysymetryczna oraz spójna.

2. Teoria środka na prostej.
Jako podstawowy można przyjąć trójargumentowy predykat opisujący bycie środkiem. Zapisać, że
1. Dla każdego odcinka (tzn. dla dowolnych dwu punktów) istnieje jego środek.
2. Dla każdych dwu punktów a i b istnieje punkt c taki, że b jest środkiem odcinka $\langle a, c\rangle$.
3. Dla każdych pięciu punktów a, b, c, d, e takich, że b jest środkiem $\langle a, c\rangle$, d jest środkiem $\langle c, e\rangle$, c jest środkiem $\langle a, e\rangle$ zachodzi, że c jest środkiem $\langle b, d\rangle$.
4. Dowolny odcinek ma tylko jeden środek.

Rozwiązanie zadania 2 podajemy w numerze. Jeśli Czytelnicy zechcą przysłać nam swe rozwiązania zadania 1, to otrzymają od nas, w postaci wydruku z komputera, wynik sprawdzenia, czy ich zdania są zgodne z regułami Mizara.

Rozwiązania tego zadania (i zadań z następnych numerów) należy przesyłać pod adresem redakcji „Delty" z napisem na kopercie MIZAR. Do koperty z rozwiązaniem należy włożyć również zaadresowaną do siebie kopertę z naklejonym znaczkiem za 5 lub 6 zł (lepiej, jeśli koperty będą większego formatu, bo do małej koperty wydruk może się nie zmieścić). Tylko przy spełnieniu tych warunków Czytelnik otrzyma obiecany wydruk. Jeśli Czytelnicy będą chcieli podzielić się z nami swoimi uwagami czy wątpliwościami — prosimy o pisanie ich na innej kartce, niż rozwiązanie (gdy będzie więcej zadań, rozwiązanie każdego powinno być też na oddzielnej kartce).