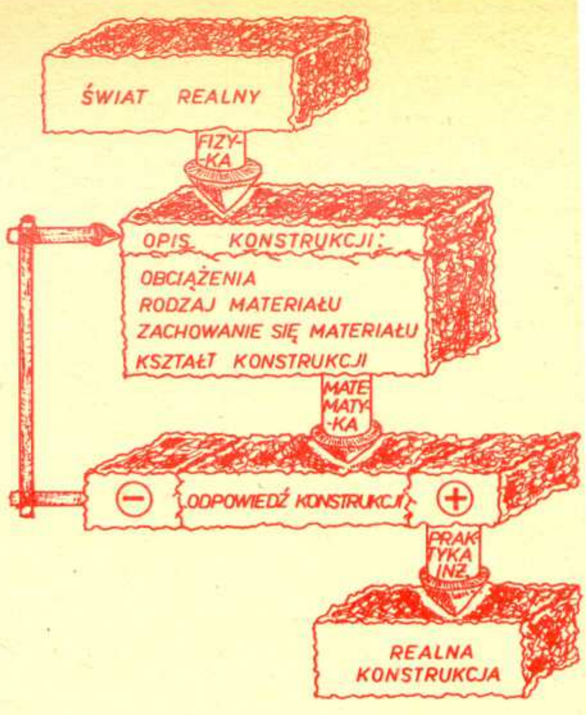
Kamieniołom na Szklanej Górze

Dr inż. Krzysztof ŻMIJEWSKI



Inżynierowie budowlani to dziwna kasta gnomów. W kamieniołomach matematycznej Szklanej Góry wyłamują bloki i tłuczeń, aby po przeróbce wznosić z nich nie szklane, lecz żelbetowe domy. Niszcząc krystaliczną strukturę nauki o świecie rzeczy, których nie ma, budują świat aż nazbyt realny. Nie badają istotnej struktury materii — to przywilej fizyków. Inżynierowie jako pragmatycy patrzą przez filtry eliminujące to, co z ich punktu widzenia pominąć można. W tak skonstruowanym zastępczym schemacie rzeczywistości pojawiają się zjawiska i obiekty rodem ze Szklanej Góry. Zobaczmy, jak wygląda ten zastępczy świat.

W trakcie projektowania konstrukcji należy określić, jakie obciążenia na nią działają, z jakiego materiału jest wykonana i jak ten materiał się zachowuje. Są to dane wejściowe, po zakończeniu obliczeń otrzymujemy informacje o odpowiedzi konstrukcji na obciążenia. Jeżeli odpowiedź nie jest zadowalająca, to zmieniamy dane wejściowe, jeżeli zaś rezultat jest pomyślny, to proces się kończy — na placu budowy.

Bardzo często się zdarza, że obciążenie pewnej konstrukcji skoncentrowane jest w otoczeniu pewnego punktu. W takim przypadku korzystamy z pojęcia siły skupionej. Siła ta jest wypadkową tego obciążenia, na przykład ciężarem znajdującego się tam ciała. Linoskoczek jest dla inżyniera dystrybucyjną nieciągłością obciążenia liny, na której stoi. Jednakże widzowie oglądający popisy akrobaty nie są traktowani jako zbiór sił skupionych, lecz jako ciągłe obciążenie widowni, jeżeli tylko siedzą dostatecznie gęsto.

Niech $x \in \Omega$, gdzie Ω jest obszarem przestrzeni zajętym przez konstrukcję. Przez q oznaczymy funkcję opisującą obciążenie; gdy jest ono siłą skupioną, funkcja ta ma postać

$$q(x) = P \cdot \delta(x - x_0),$$

$x_0 \in \Omega$ jest tu punktem przyłożenia siły, a P jej wartością, δ jest *dystrybucją Diraca.*

Równie istotne jak modelowanie obciążenia w przestrzeni jest jego przedstawienie w czasie. I tu także napotykamy świat nieciągłości. Obciążenie działające w ciągu bardzo krótkiego czasu (chwilowe) możemy zapisać następująco:

$$q(x, t) = \tilde{q}(x) \cdot \delta(t - t_0),$$

gdzie t_0 jest chwilą, w której pojawiła się i zniknęła siła. Opis powyższy odpowiada gwałtownej eksplozji lub uderzeniu pociskiem. Oczywiście bombardowanie kroplami deszczu lub molekułami gazu modelujemy funkcjami ciągłymi.

Obciążenie, które nagle pojawiło się na konstrukcji, ale na niej pozostało, przedstawiamy w postaci

$$q(x, t) = \tilde{q}(x)\theta(t - t_0),$$

t_0 jest chwilą przyłożenia obciążenia $\tilde{q}$, a θ jest *dystrybucją Heaviside'a.*

Zmienna w czasie może byc nie tylko wartość siły, ale i jej położenie. Koło lądującego samolotu wywiera na pas startowy nacisk, który można określić w następujący sposób:

$$q(x, t) = P(t) \cdot \delta(x - x_0(t)) \cdot \theta(t - t_0),$$

gdzie $x_0(t)$ oznacza położenie koła w chwili t. Skupiony charakter obciążenia opisuje tu δ Diraca, a nagły sposób jego przyłożenia θ Heaviside'a.

Obciążenia skupione (modelowane za pomocą dystrybucji δ) pełnią rolę szczególną. Jest to spowodowane nie tylko ich częstym występowaniem w praktyce inżynierskiej, ale przede wszystkim podstawowym charakterem uzyskiwanych za ich pomocą rozwiązań. Poszukiwanie odpowiedniej konstrukcji (a w zasadzie jej matematycznego modelu) sprowadzane jest zazwyczaj do znalezienia rozwiązania liniowego problemu granicznego.

W teorii równań różniczkowych przez rozwiązanie problemu granicznego w obszarze Ω rozumiemy funkcję spełniającą: pewne liniowe równanie różniczkowe w każdym punkcie $x \in \Omega$, na jego brzegu pewien warunek zwany warunkiem brzegowym, a w chwili t_0 warunek nazywany warunkiem początkowym.
Postać równania i warunków granicznych zależy od fizycznego aspektu problemu.

W przypadku problemu o stałych współczynnikach dysponowanie rozwiązaniem podstawowym ε, tzn. takim, w którym prawą stroną (obciążeniem) jest δ Diraca, umożliwia znalezienie rozwiązania u dla praktycznie dowolnego obciążenia $\tilde{q}$. Mamy wtedy

$$u(x) = \int_{\Omega} \tilde{q}(y) \cdot \varepsilon(x - y)\,\mathrm{d}y,$$

jeżeli tylko powyższa całka istnieje.

Czarnoksiężnik ze Szklanej Góry, a nawet jego uczeń z łatwością rozpozna w tym tekście rękę kamieniarza. Wyrafinowany aparat teorii dystrybucji potraktowany tu został tak, jak wielka pieczęć królewska, ale orzechy lubią wszyscy.

Dowód, że funkcja Riemanna

$$\psi(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{gdy } x = p/q \text{ i ułamek } p/q \text{ jest nieskracalny}, \\ 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym, a nieciągła w wymiernym. Weźmy bowiem dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i niech a będzie dowolnym punktem osi liczbowej. Wybierzmy m większe niż $1/\varepsilon$. W sumie przedziałów otwartych $(a-2, a)\cup(a, a+2)$ jest skończona liczba takich punktów wymiernych p/q, że $q \leqslant m$ (nie więcej niż $4m^2$). Niech δ będzie odległością a od najbliższego takiego punktu. Z określenia funkcji ψ wynika, że dla każdego $x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ mamy $|\psi(x)| < \varepsilon$ (jeśli $x \notin Q$, to $\psi(x) = 0$; a jeśli $x \in Q$ i $x = p/q$, to $q \leqslant m$). Wynika stąd, że funkcja ψ jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nieciągła w wymiernym. Nieciągłość jest usuwalna — można w punkcie wymiernym zmienić wartość funkcji z $1/q$ na 0.

W końcu lat dwudziestych tego wieku Dirac tworząc matematyczne podstawy mechaniki kwantowej różniczkował funkcję

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

otrzymując „funkcję" zwaną dziś deltą Diraca. Wykonywał na niej różne operacje, m.in. różniczkując ją. Nie miało to sensu (tak samo, jak bezpodstawne były operacje, jakie Newton wykonywał na wielkościach nieskończenie małych) — z wyjątkiem takiego, że matematycznie wyprowadzone prawa mechaniki kwantowej zgadzały się ze znanymi już danymi doświadczalnymi.

Z początkami analizy matematycznej też tak było, choć Berkeley, główny oponent Newtona napisał „Wyniki rachunków na wielkościach nieskończenie małych dlatego zgadzają się z doświadczeniem, że horrendalne błędy, jakie popełnia się w trakcie obliczeń, znoszą się nawzajem". Należało tylko zadbać o logiczną poprawność podstaw teorii.

Jak poprawnie zdefiniować deltę Diraca? Trzeba spojrzeć na nią nie jak na funkcję, a jak na dystrybucję. Szczegóły w artykule.

Czym są dystrybucje

Dr Henryk KOŁAKOWSKI

Oznaczmy przez E zbiór funkcji całkowalnych na każdym skończonym przedziale (a, b). Do zbioru E należą w szczególności wszystkie funkcje ciągłe, określone na prostej rzeczywistej $\mathbf{R}$. Oczywiście z faktu, że $f \in E$ nie wynika ciągłość, a tym bardziej różniczkowalność f. Przykładem może być funkcja θ przyjmująca w punkcie x wartość

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

θ należy do E, ale nie ma pochodnej w punkcie $x = 0$. Zajmiemy się tutaj rozszerzeniem zbioru E do pewnego nowego zbioru D', w którym dałoby się sensownie określić operację różniczkowania. Uzyskamy w ten sposób możliwość różniczkowania dowolnego elementu ze zbioru E.

Zapoznajmy się wpierw z kilkoma pojęciami. Symbolem C^∞ oznaczamy zbiór funkcji mających pochodne dowolnego rzędu.

Powiemy, że funkcja φ jest *funkcją próbną* lub krótko $\varphi \in D$, jeżeli $\varphi \in C^\infty$ i istnieje taka liczba $r > 0$, że $\varphi(x) = 0$ dla $x \notin (-r, r)$. Przykład funkcji próbnej φ (a jest liczbą dodatnią):

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & \text{dla } x \in (-a, a) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-a, a). \end{cases}$$

Powiemy, że ciąg funkcji próbnych (φ_n) jest *zbieżny w D* do funkcji $\varphi \in D$, jeżeli

1) istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego n

$$\varphi_n(x) = 0 \quad \text{dla } x \notin (-r, r),$$

2) dla każdego k ciąg $(\varphi_n^{(k)})$ jest jednostajnie zbieżny do $\varphi^{(k)}$ ($f^{(k)}$ oznacza pochodną rzędu k funkcji f).

Powiemy, że ciąg (φ_n) elementów zbioru C^∞ jest *zbieżny w C^∞* do funkcji $\varphi \in C^\infty$, jeśli dla każdego k ciąg $(\varphi_n^{(k)})$ jest jednostajnie zbieżny do $\varphi^{(k)}$ w dowolnym przedziale $\langle a, b\rangle$.

Mówimy, że ciąg funkcji $f_n: R \to R$ zbiega jednostajnie do funkcji $f: R \to R$, gdy $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n\in N} \bigwedge_{k\in N} \bigwedge_{x\in R} |f_{n+k}(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Niech f będzie odwzorowaniem zbioru funkcji próbnych w liczby rzeczywiste, tzn. $f: D \to R$. Symbolem (f, φ) oznaczamy wartość odwzorowania f na elemencie φ, czyli liczbę $f(\varphi)$. Przechodzimy teraz do zdefiniowania zbioru D'.

Powiemy, że odwzorowanie $f: D \to R$ jest *dystrybucją* (należy do D'), jeżeli

1) dla dowolnych $\varphi_1, \varphi_2 \in D$; $\alpha_1, \alpha_2 \in R$

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2),$$

2) dla dowolnego ciągu (φ_n) zbieżnego w D do funkcji φ

$$\lim_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi),$$

tzn.

1) f jest odwzorowaniem liniowym,

2) f jest odwzorowaniem ciągłym.

Podobnie określa się zbiór E' odwzorowań zbioru C^∞ w zbiór R. $f: C^\infty \to R$ jest elementem E', jeśli

1) f jest odwzorowaniem liniowym,

2) f jest odwzorowaniem ciągłym, tzn. jeśli ciąg (ψ_n) zbiega w C^∞ do ψ, to $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \psi_n) = (f, \psi)$.

Przykłady

1) Niech $f \in E$, $\varphi \in D$. Wzór

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

określa dystrybucję (oznaczamy ją nadal symbolem f), a więc $f \in D'$. Tak więc każdą funkcję $f \in E$ możemy traktować jako element D'. W szczególności funkcja θ też jest dystrybucją zwaną dystrybucją Heaviside'a.

2) Tzw. delta Diraca (δ) jest dystrybucją określoną wzorem

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

(δ jest również elementem zbioru E', w szczególności $(\delta, 1) = 1$). Okazuje się, że nie istnieje taka funkcja $f \in E$, że $(\delta, \varphi) = (f, \varphi)$ dla każdej funkcji próbnej φ. A więc zbiór D' zawiera E jako podzbiór właściwy.

Załóżmy, że f_1 i jej pochodna f_1' należą do E, a φ jest funkcją próbną. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części możemy napisać

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\varphi'(x)\,dx.$$