Jak nieciągłe mogą być funkcje?

Dr Jerzy RYLL

Zaczniemy od kilku przykładów. Będziemy rozpatrywać tylko funkcje, których dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych.

Funkcja może nie być ciągła w żadnym punkcie. Standardowym przykładem jest funkcja Dirichleta:

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \text{ jest liczba wymierną,} \\ 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną.} \end{cases}$$

Jej nieciągłość wynika z tego, że w otoczeniu dowolnego punktu przyjmuje zarówno wartość 0, jak i 1. Za pomocą funkcji Dirichleta łatwo skonstruować funkcję, która jest ciągła tylko na skończonym zbiorze $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Określamy ją wzorem

$$g(x) = \chi_Q(x) \cdot (x-a_0)(x-a_1) \cdot \ldots \cdot (x-a_n).$$

Oznaczmy przez M średnicę zbioru A, tj. różnicę między największą i najmniejszą liczbą z A. Jeżeli $0 < \delta < 1$ i $a_i - \delta < x < a_i + \delta$, to

$$|g(x)-g(a_i)| = |g(x)| < \delta \cdot (M+1)^n.$$

A zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wystarczy wziąć $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{(M+1)^n}\right\}$, by z tego, iż $|x-a_i| < \delta$ wynikało, że $|g(x)-g(a_i)| < \varepsilon$. To zaś znaczy, że g jest ciągła w a_i, dowolnie wybranym punkcie zbioru A. Gdyby funkcja g była ciągła w jakimkolwiek punkcie $x \notin A$, to funkcja χ_Q (jako iloraz dwu funkcji ciągłych w x) byłaby też ciągła w x.
Można też skonstruować funkcję, która będzie ciągła tylko w punktach o współrzędnych całkowitych:

$$h(x) = \chi_Q(x) \cdot \sin(\pi x).$$

Dowód ciągłości jest jeszcze łatwiejszy, a nieciągłości — taki sam jak poprzednio. A czy uda się Czytelnikowi znaleźć funkcję ciągłą tylko w zbiorze liczb wymiernych?

Podamy teraz przykłady funkcji, które są ciągłe w „większości" punktów. Oto funkcja nieciągła tylko w jednym punkcie:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Można z niej łatwo zrobić funkcję ciągłą wszędzie zmieniając jej wartość w 0. O tego rodzaju nieciągłości mówimy, że jest *usuwalna* (rys. 1). A oto funkcja ciągła wszędzie poza 0, przy czym nieciągłość w 0 jest *nieusuwalna* (rys. 2).

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Funkcją o nieusuwalnych nieciągłościach w skończonym zbiorze $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ jest na przykład

$$\varphi(x-a_0)+\varphi(x-a_1)+ \ldots +\varphi(x-a_n),$$

a w zbiorze liczb naturalnych:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\varphi(x-n).$$

A oto funkcja, której zbiór punktów nieciągłości (usuwalnych) jest zbiorem liczb wymiernych Q. Nazywa się ona funkcją Riemanna:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1/q & \text{gdy } x = p/q, \text{ a ułamek } p/q \text{ jest nieskracalny,} \\ 0 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną.} \end{cases}$$

Można łatwo sprawdzić, że ma ona postulowane własności; można też poszukać dowodu „gdzieś" w numerze. Jeśli zaś kogoś interesuje przykład funkcji o nieusuwalnych nieciągłościach w punktach wymiernych, powinien spojrzeć na koniec artykułu.

W „teoretycznej" części artykułu podamy dwa twierdzenia mówiące coś o zbiorach nieciągłości funkcji rzeczywistej. Wyróżnimy najpierw dwie klasy zbiorów: $\mathbf{F}_\sigma$ i $\mathbf{G}_\delta$. Powiemy, że zbiór pewnych liczb rzeczywistych jest typu $\mathbf{F}_\sigma$, jeśli jest sumą *przeliczalnej* rodziny zbiorów domkniętych; jest zaś typu $\mathbf{G}_\delta$, jeśli jest częścią wspólną *przeliczalnej* rodziny zbiorów otwartych.

Zbiór jest przeliczalny, gdy jego elementy można ustawić w ciąg. Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a zbiór (wszystkich) liczb rzeczywistych nie.

Łatwo zauważyć, że zarówno zbiory otwarte, jak i zbiory domknięte są i $\mathbf{F}_\sigma$, i $\mathbf{G}_\delta$. Zbiór jest typu $\mathbf{G}_\delta$ wtedy i tylko wtedy, kiedy jego dopełnienie jest typu $\mathbf{F}_\sigma$. Także przeciwnie: jest typu $\mathbf{F}_\sigma$ wtedy i tylko wtedy, gdy uzupełnienie jest typu $\mathbf{G}_\delta$. Zbiór liczb wymiernych jest typu $\mathbf{F}_\sigma$ — jest bowiem przeliczalną sumą jednopunktowych zbiorów domkniętych.

Wzorując się na poprzednim przykładzie można dla dowolnego zbioru A typu $\mathbf{F}_\sigma$ znaleźć funkcję, dla której A będzie zbiorem punktów nieciągłości. Okazuje się, że więcej przykładów znaleźć nie można.

Twierdzenie Zbiór punktów nieciągłości funkcji rzeczywistej jest typu $\mathbf{F}_\sigma$.
Oczywiście, równoważnym sformułowaniem twierdzenia jest: zbiór punktów ciągłości funkcji rzeczywistej jest typu $\mathbf{G}_\delta$.

Dowód tego twierdzenia nie jest trudny. Nazwijmy *oscylacją* funkcji f w przedziale (a, b) liczbę

$$\omega(a, b) = \sup\{|f(x)-f(y)| : x, y \in (a, b)\},$$

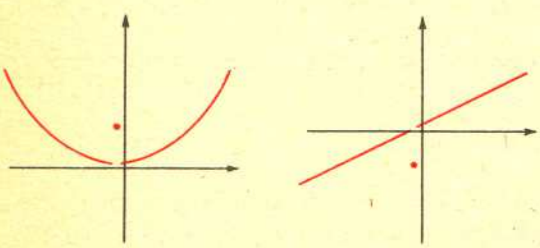
a *oscylacją w punkcie* x wielkość

$$\omega(x) = \inf\{\omega(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}.$$

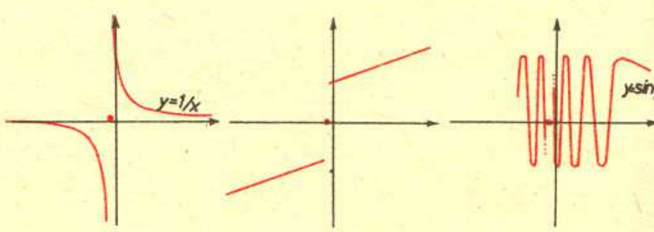
Pokażemy, że zbiór $G_t = \{x : \omega(x) < t\}$ jest otwarty. Niech x_0 będzie takim punktem, że oscylacja funkcji jest w nim mniejsza niż t. Znaczy to, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\omega(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) < t.$$

Niech $|x_1-x_0| < \varepsilon/2$. Wtedy przedział $(x_1-\varepsilon/2, x_1+\varepsilon/2)$



Rys. 1 Nieciągłości usuwalne



Rys. 2 Nieciągłości nieusuwalne

jest zawarty w $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$, a więc $\omega(x_1-\varepsilon/2,\ x_1+\varepsilon/2) \leqslant \omega(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$, czyli $\omega(x_1) < t$.

Pokazaliśmy, że dla dowolnego punktu $x_0 \in G_t$ pewne jego otoczenie jest zawarte w G_t — a więc G_t jest istotnie zbiorem otwartym. Dla zakończenia dowodu twierdzenia wystarczy zauważyć, że

$$\{x\colon \omega(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x\colon \omega(x) < 1/n\},$$

oraz że funkcja f jest ciągła w pewnym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy ma w nim zerową oscylację.

Jeśli Czytelnikowi nie udało się skonstruować funkcji ciągłej tylko w zbiorze liczb wymiernych, to właśnie z powodu powyższego twierdzenia (a jeżeli udało się, to ... pomylił się). Wykażemy bowiem, że zbiór liczb niewymiernych nie jest zbiorem typu F_δ. Załóżmy, że są takie zbiory domknięte $F_1, F_3, F_5, F_7, \ldots$, (wygodnie nam będzie numerować je liczbami nieparzystymi), że dopełnienie Q do R jest ich sumą: $R \setminus Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{2n-1}$. Ustawmy liczby wymierne w ciąg i określmy F_{2n} jako zbiory jednopunktowe złożone z poszczególnych liczb wymiernych. Mamy zatem

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Ponieważ ani zbiór liczb wymiernych, ani liczb niewymiernych nie zawierają żadnego przedziału, więc dla dowolnego przedziału (a, b) i dowolnego naturalnego n mamy $(a, b)\setminus F_n \neq \emptyset$.

Utwórzmy teraz ciąg przedziałów domkniętych $\langle a_n, b_n\rangle$ o następujących własnościach

$$\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle;\ F_n \cap \langle a_n, b_n\rangle = \emptyset.$$

Określimy go rekurencyjnie. Przyjmiemy $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Zbiór $(a_n, b_n)\setminus F_{n+1}$ jest niepusty i otwarty, a więc zawiera pewien niepusty przedział $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle$. Z twierdzenia o zbieżności ciągów monotonicznych wynika, że $a_n \to a$ i że dla każdego n jest $a \in \langle a_n, b_n\rangle$. Czyli (przy dowolnym n) $a \notin F_n$, mimo że suma zbiorów F_n dawała całe R; sprzeczność.

Odpowiedź na tytułowe pytanie jest nieco inna, gdy ograniczymy się tylko do klasy funkcji monotonicznych.
Zbiorem punktów nieciągłości funkcji monotonicznej może być dowolny zbiór przeliczalny (i tylko taki).

Jeżeli funkcja f jest np. niemalejąca, to każdemu punktowi nieciągłości a odpowiada przedział otwarty $(\sup\{f(x)\colon x < a\},\ \inf\{f(x)\colon x > a\})$, przy czym różnym punktom odpowiadają przedziały rozłączne. Takich przedziałów, a zatem i punktów nieciągłości może być tylko przeliczalnie wiele.

Oto przykład funkcji niemalejącej, której zbiorem punktów nieciągłości jest zbiór przeliczalny $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

$$f(x) = \sum_{\{n:a_n < x\}} 2^{-n}$$

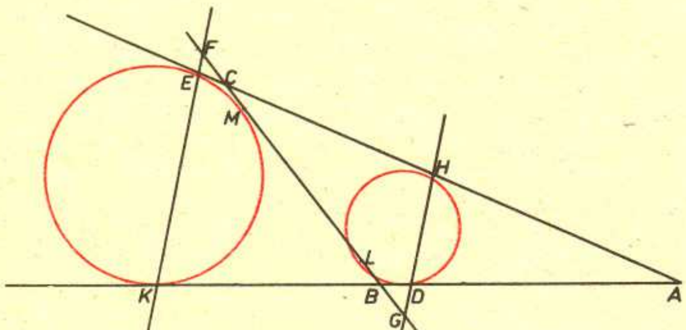
(umawiamy się, że suma po zbiorze pustym jest równa 0, a sumujemy po takich n, dla których $a_n < x$).

Rozwiązanie zadania F 138.
Nie wnikając w szczegóły mechanizmu tworzenia się, wzrostu i ruchu pęcherzyków pary należy stwierdzić, że wrzenie cieczy jednorodnej odbywa się w temperaturze, przy której prężność pary nasyconej zawartej w pęcherzyku przekroczy wartość ciśnienia atmosferycznego. W naszym przypadku pęcherzyki powstają na granicy faz i zawierają pary nasycone obu cieczy. Zgodnie z prawem Daltona prężność mieszaniny jest równa sumie prężności obu par i zależy jedynie od temperatury. W momencie, gdy rozpoczyna się wrzenie, musi być ona równa ciśnieniu atmosferycznemu. Wynika stąd, że temperatura wrzenia jest niższa niż 80,7°C. Znajomość temperaturowej zależności prężności par nasyconych dla obu cieczy wyznacza jednoznacznie tę wartość (69,4°C) oraz odpowiadające tej temperaturze ciśnienia poszczególnych par (533 Tr — cykloheksan, 227 Tr — H_2O). Z równania Clapeyrona wynika stosunek mas składników w ulatniających się oparach (ok. 11- krotnie więcej węglowodoru niż wody). Z naczynia zniknie szybciej cykloheksan, wrzenie ustanie i rozpocznie się ponownie, gdy temperatura wzrośnie do 100°C.
Przytoczona obok tabela prężności par nasyconych pozwoli Czytelnikowi sprawdzić, czy podane wyżej wartości liczbowe są prawdziwe.

Temperatura [°C]	$P_{nas}(C_6H_{12})$ [Tr]	$P_{nas}(H_2O)$ [Tr]
10	47,48	9,2
20	77,51	17,53
30	121,7	31,82
40	184,7	55,32
50	271,8	92,51
60	389,2	149,4
65	461,4	187,5
70	543,8	233,7
75	637,4	289,1
80	743,2	355,1

Rozwiązanie zadania M 338.
Dzieląc n-kąt $A_1 \ldots A_n$ odcinkami $\overline{AA_1}, \ldots, \overline{AA_n}$ na trójkąty zauważymy, że jego pole S równa się $\frac{a}{2}(h_1 + \ldots + h_n)$, gdzie a jest długością boku wielokąta, a h jest wysokością trójkąta AA_iA_{i+1} poprowadzoną z A (czyli odległością A od prostej A_iA_{i+1}). Widać stąd, że $h_1 + \ldots + h_n = \frac{2S}{a}$ nie zależy od położenia A.

Rozwiązanie zadania M 337.
Liczby n i n^2 są oczywiście zawsze podobne. Jeżeli teraz $n+1 = 2^k$ $(k \geqslant 2)$, to $n-1$ i $n^2-1 = 2^k(n-1)$ są również podobne, ponieważ $n-1 \mid n^2-1$ oraz $2 \mid n-1$. Otrzymujemy więc nieskończony ciąg par liczb bardzo podobnych postaci 2^k-2 i $2^k(2^k-2)$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Bardzo podobne są też liczby 75 i 1215. Nie wiadomo dotychczas, czy są inne pary liczb bardzo podobnych.



Znajdź twierdzenie

Na rysunku obok widzimy trójkąt z okręgiem wpisanym i jednym z okręgów dopisanych. „Widzimy" także, że
proste DH i KF są równoległe,
promień „małego" okręgu jest dwa razy mniejszy od promienia dużego,
$AD = DK = AH = HE$,
$BD = CE = CM = LB$,
$BG = CF$.
I oto pytanie: która z powyższych własności przysługuje tylko takiemu trójkątowi, jak tu narysowany (no i trójkątom do niego podobnym), a która dowolnym trójkątom?