Dowód, że funkcja Riemanna

$$\psi(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{gdy } x = p/q \text{ i ułamek } p/q \text{ jest nieskracalny,} \\ 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym, a nieciągła w wymiernym. Weźmy bowiem dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i niech a będzie dowolnym punktem osi liczbowej. Wybierzmy m większe niż $1/\varepsilon$. W sumie przedziałów otwartych $(a-2, a) \cup (a, a+2)$ jest skończona liczba takich punktów wymiernych p/q, że $q \leqslant m$ (nie więcej niż $4m^2$). Niech δ będzie odległością a od najbliższego takiego punktu. Z określenia funkcji ψ wynika, że dla każdego $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ mamy $|\psi(x)| < \varepsilon$ (jeśli $x \notin \boldsymbol{Q}$, to $\psi(x) = 0$; a jeśli $x \in \boldsymbol{Q}$ i $x = p/q$, to $q \leqslant m$). Wynika stąd, że funkcja ψ jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nieciągła w wymiernym. Nieciągłość jest usuwalna — można w punkcie wymiernym zmienić wartość funkcji z $1/q$ na 0.

W końcu lat dwudziestych tego wieku Dirac tworząc matematyczne podstawy mechaniki kwantowej różniczkował funkcję

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

otrzymując „funkcję" zwaną dziś deltą Diraca. Wykonywał na niej różne operacje, m.in. różniczkując ją. Nie miało to sensu (tak samo, jak bezpodstawne były operacje, jakie Newton wykonywał na wielkościach nieskończenie małych) — z wyjątkiem takiego, że matematycznie wyprowadzone prawa mechaniki kwantowej zgadzały się ze znanymi już danymi doświadczalnymi.

Z początkami analizy matematycznej też tak było, choć Berkeley, główny oponent Newtona napisał „Wyniki rachunków na wielkościach nieskończenie małych dlatego zgadzają się z doświadczeniem, że horrendalne błędy, jakie popełnia się w trakcie obliczeń, znoszą się nawzajem". Należało tylko zadbać o logiczną poprawność podstaw teorii.

Jak poprawnie zdefiniować deltę Diraca? Trzeba spojrzeć na nią nie jak na funkcję, a jak na dystrybucję. Szczegóły w artykule.

Czym są dystrybucje

Dr Henryk KOŁAKOWSKI

Oznaczmy przez $\boldsymbol{E}$ zbiór funkcji całkowalnych na każdym skończonym przedziale (a, b). Do zbioru $\boldsymbol{E}$ należą w szczególności wszystkie funkcje ciągłe, określone na prostej rzeczywistej $\mathbf{R}$. Oczywiście z faktu, że $f \in \boldsymbol{E}$ nie wynika ciągłość, a tym bardziej różniczkowalność f. Przykładem może być funkcja θ przyjmująca w punkcie x wartość

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

θ należy do $\boldsymbol{E}$, ale nie ma pochodnej w punkcie $x = 0$. Zajmiemy się tutaj rozszerzeniem zbioru $\boldsymbol{E}$ do pewnego nowego zbioru $\boldsymbol{D}'$, w którym dałoby się sensownie określić operację różniczkowania. Uzyskamy w ten sposób możliwość różniczkowania dowolnego elementu ze zbioru $\boldsymbol{E}$.

Zapoznajmy się wpierw z kilkoma pojęciami. Symbolem $\boldsymbol{C}^\infty$ oznaczamy zbiór funkcji mających pochodne dowolnego rzędu.

Powiemy, że funkcja φ jest *funkcją próbną* lub krótko $\varphi \in \boldsymbol{D}$, jeżeli $\varphi \in \boldsymbol{C}^\infty$ i istnieje taka liczba $r > 0$, że $\varphi(x) = 0$ dla $x \notin (-r, r)$. Przykład funkcji próbnej φ (a jest liczbą dodatnią):

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & \text{dla } x \in (-a, a) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-a, a). \end{cases}$$

Powiemy, że ciąg funkcji próbnych (φ_n) jest *zbieżny w* $\boldsymbol{D}$ do funkcji $\varphi \in \boldsymbol{D}$, jeżeli

1) istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego n

$$\varphi_n(x) = 0 \quad \text{dla } x \notin (-r, r),$$

2) dla każdego k ciąg $(\varphi_n^{(k)})$ jest jednostajnie zbieżny do $\varphi^{(k)}$ ($f^{(k)}$ oznacza pochodną rzędu k funkcji f).

Powiemy, że ciąg (φ_n) elementów zbioru $\boldsymbol{C}^\infty$ jest *zbieżny w* $\boldsymbol{C}^\infty$ do funkcji $\varphi \in \boldsymbol{C}^\infty$, jeśli dla każdego k ciąg $(\varphi_n^{(k)})$ jest jednostajnie zbieżny do $\varphi^{(k)}$ w dowolnym przedziale $\langle a, b \rangle$.

Mówimy, że ciąg funkcji $f_n: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ zbiega jednostajnie do funkcji $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, gdy $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n \in N} \bigwedge_{k \in N} \bigwedge_{x \in R} |f_{n+k}(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Niech f będzie odwzorowaniem zbioru funkcji próbnych w liczby rzeczywiste, tzn. $f: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$. Symbolem (f, φ) oznaczamy wartość odwzorowania f na elemencie φ, czyli liczbę $f(\varphi)$. Przechodzimy teraz do zdefiniowania zbioru $\boldsymbol{D}'$.

Powiemy, że odwzorowanie $f: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ jest *dystrybucją* (należy do $\boldsymbol{D}'$), jeżeli

1) dla dowolnych $\varphi_1, \varphi_2 \in \boldsymbol{D}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2),$$

2) dla dowolnego ciągu (φ_n) zbieżnego w $\boldsymbol{D}$ do funkcji φ

$$\lim_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi),$$

tzn.

1) f jest odwzorowaniem liniowym,

2) f jest odwzorowaniem ciągłym.

Podobnie określa się zbiór $\boldsymbol{E}'$ odwzorowań zbioru $\boldsymbol{C}^\infty$ w zbiór $\boldsymbol{R}$. $f: \boldsymbol{C}^\infty \to \boldsymbol{R}$ jest elementem $\boldsymbol{E}'$, jeśli

1) f jest odwzorowaniem liniowym,

2) f jest odwzorowaniem ciągłym, tzn. jeśli ciąg (ψ_n) zbiega w $\boldsymbol{C}^\infty$ do ψ, to $\lim_{n\to\infty} (f, \psi_n) = (f, \psi)$.

Przykłady

1) Niech $f \in \boldsymbol{E}$, $\varphi \in \boldsymbol{D}$. Wzór

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

określa dystrybucję (oznaczamy ją nadal symbolem f), a więc $f \in \boldsymbol{D}'$. Tak więc każdą funkcję $f \in \boldsymbol{E}$ możemy traktować jako element $\boldsymbol{D}'$. W szczególności funkcja θ też jest dystrybucją zwaną dystrybucją Heaviside'a.

2) Tzw. delta Diraca (δ) jest dystrybucją określoną wzorem

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

(δ jest również elementem zbioru $\boldsymbol{E}'$, w szczególności $(\delta, 1) = 1$). Okazuje się, że nie istnieje taka funkcja $f \in \boldsymbol{E}$, że $(\delta, \varphi) = (f, \varphi)$ dla każdej funkcji próbnej φ. A więc zbiór $\boldsymbol{D}'$ zawiera $\boldsymbol{E}$ jako podzbiór właściwy.

Załóżmy, że f_1 i jej pochodna f_1' należą do $\boldsymbol{E}$, a φ jest funkcją próbną. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części możemy napisać

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wzór ten jest punktem wyjścia do zdefiniowania pochodnej dystrybucyjnej dowolnej dystrybucji f.

Pochodną dystrybucji f nazywamy taką dystrybucję g, że dla dowolnej funkcji próbnej mamy

$$(g, \varphi) = -(f, \varphi').$$

Zamiast g piszemy dalej po prostu f'.

Znajdźmy pochodną dystrybucji Heaviside'a θ. Zgodnie z definicją

$$(\theta', \varphi) = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) \doteq (\delta, \varphi).$$

Zatem w sensie dystrybucyjnym $\theta' = \delta$.

Na zakończenie wskażemy na pewne zastosowania pojęcia dystrybucji. Zastanówmy się, jak określić funkcję gęstości g związaną z punktem materialnym o masie 1. Powiedzmy, że punkt ten pokrywa się z punktem $x = 0$ na osi liczbowej $\mathbf{R}$. Rozmieścimy masę 1 równomiernie wzdłuż odcinka $(-\varepsilon, \varepsilon)$. W rezultacie otrzymamy następującą funkcję gęstości

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{dla } x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-\varepsilon, \varepsilon) \end{cases}$$

spełniającą warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Przyjmijmy na początek, że

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Funkcja g jako funkcja gęstości powinna spełniać warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1.$$

Tymczasem $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 0$. A więc nie tędy droga.

Powiemy, że ciąg dystrybucji (f_n) jest *zbieżny słabo* do $f \in D'$, jeśli dla każdej funkcji próbnej φ

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Obliczmy teraz słabą granicę funkcji g_ε (traktowanych jako elementy D'). Granica ta istnieje i jest równa delcie Diraca. Istotnie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

W celu otrzymania pełnej gęstości należy więc obliczyć wartość delty Diraca na funkcji równej tożsamościowo jedności. Tak więc wspomniana wyżej funkcja gęstości g nie jest już zwykłą funkcją, lecz dystrybucją.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań

zadań z numeru 1/1983

Marek Gałecki	- Milanówek	50,41pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	48,83pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	44,51pkt
Krzysztof Trautman	- Warszawa	40,50pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	34,95pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	34,04pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Z.	31,80pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	28,68pkt

i zadań z numeru 2/1983

Krzysztof Trautman	- Warszawa	48,41pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	39,92pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Z.	36,72pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	34,95pkt
Jacek Uryga	- Bytom	34,53pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	28,68pkt
Marian Roman	- Ełk	27,32pkt

Współczynniki trudności zadań:

43	44	45	46	47	48
2,90	2,21	2,88	3,39	2,36	2,84

Kolejnymi uczestnikami ligi, którzy weszli do Klubu 44, są panowie: M.Gałecki, Z.Bartold, D.Sowizdrzał, K.Trautman.

Reprezentują - jak widać - Wybrzeże oraz Warszawę z okolicą.

Klub 44

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Zadania nr 58, 59, 60

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1983

58. Jak wiadomo, wartość funkcji wykładniczej e^x jest dla każdego x równa sumie szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Który wyraz tego szeregu jest (przy ustalonym $x > 0$) największy?

59. Jakim trójkątom ABC przysługuje własność następująca: dla każdego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta ABC można z odcinków $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ zbudować trójkąt?

60. Liczbę 24 można na dwa sposoby zapisać w postaci sumy czterech swoich różnych dzielników: $24 = 1+3+8+12 = 2+4+6+12$. Jaka jest maksymalna liczba sposobów, na które liczba naturalna może być przedstawiona jako suma czterech swoich różnych dzielników? Wskazać najmniejszą liczbę naturalną realizującą to maksimum.
Zadanie 59 przysłał nasz Czytelnik, pan Piotr Chrząstowski z Warszawy.