Znów przyznam się, że trochę zlekceważyliśmy te obawy, może dlatego, że tak niewiele wiedziano wówczas o cząstkach elementarnych, a może dlatego, że wszystkie inne wyjaśnienia wydawały się nam znacznie mniej sensowne. Słuszność naszego zlekceważenia możliwości szybkiego rozpadu hiperonu znalazła wkrótce uzasadnienie w pięknych pracach Paisa i Gell-Manna, którzy zauważyli, iż hiperony mają pewną specjalną cechę chroniącą je od szybkiego rozpadu. To chyba zamyka historię.

Wielościany z minimalną liczbą powtórzeń

Małgorzata ZALEWSKA

W artykule tym będziemy zajmować się wielościanami wypukłymi. Ustalmy najpierw terminologię. Będziemy mówili, że ściany są tego samego rodzaju, gdy mają tę samą liczbę boków. Jeżeli oznaczymy liczbę ścian wielościanu $\mathscr{W}$ przez $s(\mathscr{W})$, a liczbę rodzajów ścian przez $r(\mathscr{W})$, to $s(\mathscr{W}) - r(\mathscr{W})$ nazywać będziemy liczbą powtórzeń w tym wielościanie.
Jak można wykazać, każdy wielościan ma dwie ściany tego samego rodzaju. My udowodnimy nawet więcej — a mianowicie: dla każdego wypukłego wielościanu $\mathscr{W}$

$$s(\mathscr{W}) - r(\mathscr{W}) \geqslant 3.$$

Dowód: Załóżmy, że w danym wielościanie $\mathscr{W}$ ścianą o największej liczbie krawędzi jest $k(\mathscr{W})$-kąt. Ścian w tym wielościanie musi być co najmniej $k(\mathscr{W})+1$, więc $s(\mathscr{W}) \geqslant k(\mathscr{W})+1$. Rodzajów ścian może być co najwyżej $k(\mathscr{W})-2$, gdyż i-kąt może być ścianą tego wielościanu tylko dla $i = 3, 4, \ldots, k(\mathscr{W})$, więc

$$r(\mathscr{W}) \leqslant k(\mathscr{W})-2, \text{ stąd}$$

$$s(\mathscr{W}) - r(\mathscr{W}) \geqslant k(\mathscr{W})+1-(k(\mathscr{W})-2) = 3,$$

a więc w każdym wielościanie są co najmniej trzy powtórzenia. Postaramy się znaleźć wszystkie (z dokładnością do homeomorfizmów, zachowujących własność ,,być wierzchołkiem'' i ,,być krawędzią'') wielościany z trzema powtórzeniami. Ponieważ dalej będziemy zajmować się tylko wielościanami z trzema powtórzeniami, mówiąc ,,wielościan'' będziemy mieli na myśli taki właśnie wielościan. Umówmy się, że wielościan, w którym ścianą o największej liczbie boków jest k-kąt, będziemy nazywać ,,wielościanem z k-kątem''. Z powyższych rozważań łatwo wynikają następujące własności:

1. Dla wszystkich $i = 3, 4, \ldots, k$ wielościan z k-kątem zawiera ściany, będące i-kątami.

2. W wielościanie z k-kątem każda ściana ma krawędź wspólną z k-kątem.

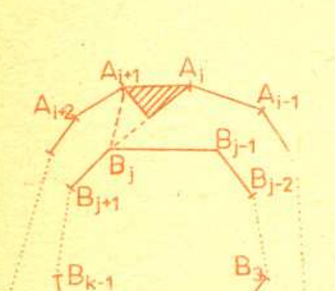
3. W wielościanie z k-kątem dokładnie jedna ściana nie ma krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem.

Następne własności są nieco mniej oczywiste, dlatego dla przykładu przytoczymy dowód jednej z nich:

4. W wielościanie z co najmniej dwoma k-kątami (oznaczmy je $A_1 A_2 \ldots A_k$, $B_1 B_2 \ldots B_k$)
a) wielokąty te mają wspólną krawędź (np. $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$),
b) ściana zawierająca krawędzie $\overline{A_1 A_k}$ i $\overline{A_1 B_k}$ jest trójkątem, podobnie jak ściana zawierająca krawędzie $\overline{A_2 A_3}$ i $\overline{A_2 B_3}$ (wł. **2**).

5. Jeżeli $A_1 A_2 B_3 \ldots B_{k-1}$ jest ścianą wielościanu z dokładnie jednym k-kątem $A_1 A_2 \ldots A_k$, to ściana zawierająca krawędzie $\overline{A_2 A_3}$ i $\overline{A_2 B_3}$ lub $\overline{A_1 A_k}$ i $\overline{A_1 B_{k-1}}$ jest trójkątem (wł. **2** i **3**).

6. W wielościanie z dokładnie jednym k-kątem $A_1 A_2 \ldots A_k$ każda ściana, która nie ma krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem $A_1 A_2 B_3 \ldots B_{k-1}$ jest trójkątem.
Dowód: Oznaczmy k-kąt i $(k-1)$-kąt jak na rys. 1.
Ściana zawierająca krawędź $\overline{A_i A_{i+1}}$ nie ma krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem $A_1 A_2 B_3 \ldots B_{k-1}$.



Rys. 1

Jest to jedyna ściana nie mająca krawędzi wspólnej z tą ścianą (wł. **3**), więc ściany zawierające krawędzie $\overline{A_iA_{i-1}}$ oraz $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ mają krawędzie wspólne z $(k-1)$-kątem $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$ (p. wł. **3**) oraz z k-kątem (wł. **2**) i wspólny wierzchołek B_j. Gdyby bowiem ściana o krawędzi $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ zawierała np. krawędź $\overline{B_jB_{j+1}}$, a ściana o krawędzi $\overline{A_{i-1}A_i}$ krawędź $\overline{B_{j-2}B_{j-1}}$, to ściana o krawędzi $B_{j-1}B_j$ nie miałaby wspólnej krawędzi z k-kątem i otrzymalibyśmy sprzeczność z wł. **2**.

7. Jeżeli w wielościanie z dokładnie jednym k-kątem wierzchołek P nie należy do k-kąta ani do $(k-1)$-kąta, to istnieje trójkąt o wierzchołku P i podstawie będącej równocześnie krawędzią k-kąta, a więc nie mający punktów wspólnych z $(k-1)$-kątem. (W dowodzie korzysta się z wł. **2** i **3**).

8. W wielościanie z dokładnie jednym k-kątem co najwyżej jeden wierzchołek nie należy do k-kąta ani do $(k-1)$-kąta (wn. z wł. **3** i **7**).

Korzystając z powyższych własności możemy podać, dla jakich k mogą istnieć wielościany z k-kątem:

9. Jeżeli w wielościanie $\mathscr{W}$, z dokładnie jednym k-kątem istnieje wierzchołek nie należący do k-kąta ani do $(k-1)$-kąta (por. wł. **8**), to $l(\mathscr{W})$ — liczba wierzchołków w tym wielościanie jest równa

$$l(\mathscr{W}) = k+(k-1)-2+1 = 2k-2$$

i ponadto $6 \leqslant k \leqslant 7$.

Jeżeli wierzchołek taki nie istnieje, to $l(\mathscr{W}) = 2k-3$ i $4 \leqslant k \leqslant 6$ (wn. z wł. **2**, **3** i **7**).

10. W wielościanie $\mathscr{W}$ z co najmniej dwoma k-kątami $l(\mathscr{W}) = 2k-2$ i $3 \leqslant k \leqslant 5$ (wn. z wł. **2**).

11. Jedynym wielościanem z dokładnie trzema k-kątami jest graniastosłup o podstawie trójkątnej (p. wł. **2** i **4**).

12. Jedynym wielościanem z czterema k-kątami jest czworościan (p. wł. **4**).

Skoro określiliśmy, dla jakich k mogą istnieć wielościany z k-kątem, postaramy się je zbudować.

1° Dla $k = 3$ otrzymujemy tylko jeden wielościan z trzema powtórzeniami — jest nim czworościan (rys. 2).

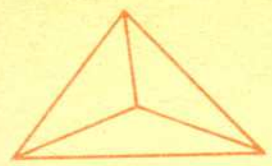
2° Dla $k = 4$ jedynym wielościanem z trzema k-kątami jest graniastosłup o podstawie trójkątnej. Oprócz tego istnieje wielościan z jednym k-kątem — jest nim ostrosłup o podstawie czworokąta (rys. 3).

3° Dla $k = 5$ wielościan z k-kątem może mieć dwa k-kąty lub tylko jeden (wł. **9**, **10**, **11**, **12**). Weźmy dwa k-kąty $A_1A_2A_3A_4A_5$ i $A_1A_2A_6A_7A_8$. Ściany zawierające krawędzie $\overline{A_1A_5}$ i $\overline{A_1A_8}$ oraz $\overline{A_2A_3}$ i $\overline{A_2A_6}$ muszą być trójkątami (p. wł. **4**) — wstawiamy trójkąty $\Delta A_1A_5A_8$ i $\Delta A_2A_3A_5$ (rys. 4). Możemy teraz wstawić dwie ściany. Jedna z nich zawiera krawędzie $\overline{A_3A_4}$ i $\overline{A_6A_7}$, a druga $\overline{A_4A_5}$ i $\overline{A_7A_8}$ (wł. **2**) — ściany te muszą przecinać się wzdłuż krawędzi $\overline{A_4A_7}$ — są więc czworokątami. Po „wstawieniu” tych ścian otrzymujemy wielościan przedstawiony na rys. 5. Ze sposobu konstrukcji wynika, że nie można zbudować innego wielościanu z dwoma pięciokątami, natomiast posługując się podobną metodą konstrukcji wielościanu można zbudować wielościan z dokładnie jednym pięciokątem (rys. 6).

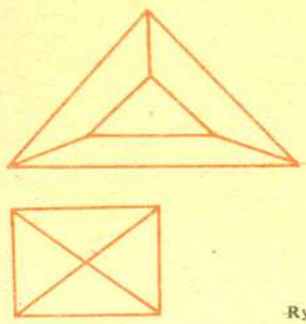
4° Dla $k = 6$ możemy zbudować tylko wielościan z jednym k-kątem (p. wł. **10**, **11**, **12**). Z własności **9** wynika, że wielościan z sześciokątem może mieć $2k-3 = 9$ lub $2k-2 = 10$ wierzchołków. Jeżeli założymy, że wielościan z sześciokątem ma 9 wierzchołków, to otrzymamy dwa wielościany, przedstawione na rys. 7. Jedyny wielościan z sześciokątem mający 10 wierzchołków przedstawiony jest na rys. 8.

5° Niech $k = 7$. Z własności **9**, **10**, **11**, **12** wynika, że może istnieć jedynie wielościan z jednym siedmiokątem i może on mieć $2k-2 = 12$ wierzchołków. Ze sposobu konstrukcji wynika, że istnieją dwa wielościany z siedmiokątem, przedstawione na rys. 9.

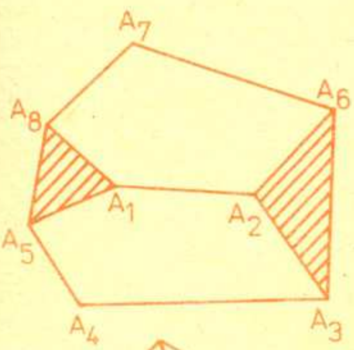
Z własności **9**, **10**, **11**, **12** wynika, że nie istnieją inne wielościany z trzema powtórzeniami. Znaleźliśmy 10 klas wielościanów. Mają one pewną ciekawą własność: każdy wielościan z k-kątem można otrzymać przez „obcięcie” pewnego wielościanu z $(k-1)$-kątem, a więc każdy wielościan z trzema powtórzeniami można otrzymać przez obcinanie czworościanu otrzymując po drodze wyłącznie wielościany z minimalną liczbą powtórzeń.



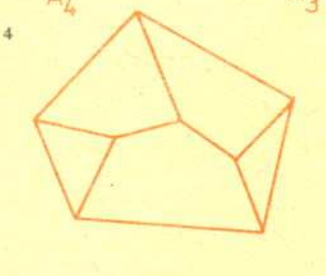
Rys. 2



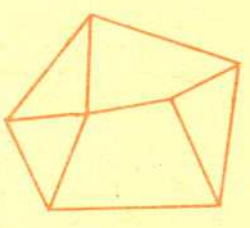
Rys. 3



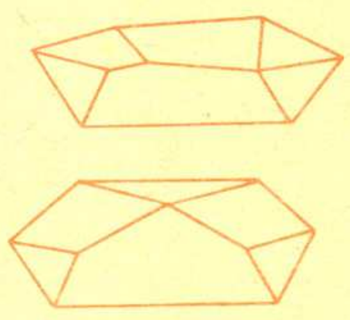
Rys. 4



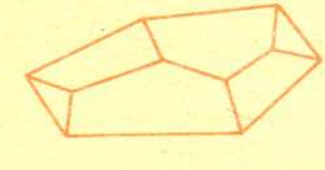
Rys. 5



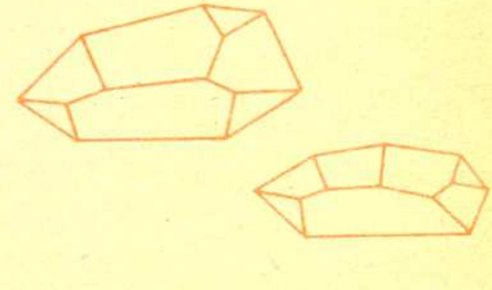
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9