O polu prostokąta

Prof. dr Marek KUCZMA

Pole prostokąta o bokach a i b wyraża się wzorem: $P = a \cdot b$. Dlaczego? Czy wzór ten został nam narzucony przez autorów podręczników i zależy wyłącznie od ich wyboru? Czy też może jest on koniecznością i nie ma innej możliwości; innymi słowy może można go udowodnić?
Aby móc na te pytania odpowiedzieć, musimy wpierw dobrze zdać sobie sprawę z tego, czym właściwie jest pole prostokąta. Możemy powiedzieć, że jest to miara wielkości prostokąta. Zauważmy jednak, że zdanie to nie jest bynajmniej definicją, gdyż zastępuje tylko jedno niesprecyzowane pojęcie (pole) przez inne (miara wielkości). Niemniej pozwala ono odwołać się do intuicji geometrycznej. Jakież zatem własności powinna mieć taka miara wielkości prostokąta? Intuicja geometryczna sugeruje nam, że powinna ona spełniać następujące trzy warunki:

A. Każdy prostokąt ma jednoznacznie określone pole, które wyraża się liczbą rzeczywistą nieujemną.

B. Przystające prostokąty mają równe pola.

C. Jeżeli prostokąt podzielimy na dwie części odcinkiem równoległym do któregokolwiek z boków, to suma pól powstałych w ten sposób prostokątów jest równa polu wyjściowego prostokąta.

Zanim posuniemy się dalej w naszych rozważaniach, trzeba jasno stwierdzić, że powyższe postulaty, aczkolwiek dyktowane intuicją geometryczną, nie są bynajmniej konieczne i w znacznym stopniu przyjęcie ich zależy od naszej woli.
Zgadzamy się, że miara powinna być liczbą nieujemną, ale są przecież wielkości (np. temperatura, czas), których miarę wyrażamy w liczbach względnych.
Dwa przystające prostokątne poletka gruntu mogą mieć różną cenę (a cenę wszak też możemy uważać za pewną miarę) w zależności od położenia, gleby itp.
Wreszcie np. dwie pięciodekowe paczki kawy kosztują więcej niż jedna paczka dziesięciodekowa. Tak więc w pewnych okolicznościach miara nie musi spełniać żadnego ze sformułowanych powyżej postulatów **A**, **B**, **C**. W przypadku pola prostokąta wydają się nam one rozsądne i zgodne z naszą intuicją, zatem jesteśmy gotowi przyjąć je bez zastrzeżeń. Zależy to jednakże od naszej woli, od naszego wyboru.
Zgódźmy się zatem, że przyjmujemy postulaty **A**, **B**, **C** i postarajmy się teraz przetłumaczyć je na język matematyczny. Ponieważ prostokąty o bokach odpowiednio równych są przystające, więc z postulatów **A** i **B** wynika, że pole prostokąta zależy wyłącznie od jego boków (czy też, dokładniej, od długości jego boków). Ściślej mówiąc, pole to jest funkcją: $P = P(a, b)$, określoną w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i przyjmującą wartości w zbiorze $\langle 0, +\infty)$:

$$P\colon \langle 0, +\infty) \times \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty). \tag{1}$$

Najistotniejsze informacje zawiera jednak postulat **C**. Dokonując opisanych podziałów (patrz rysunek) widzimy, że funkcja P musi spełniać następujące dwa związki:

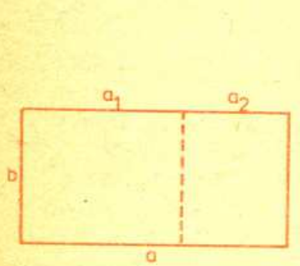
$$P(a_1 + a_2, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b), \tag{2}$$

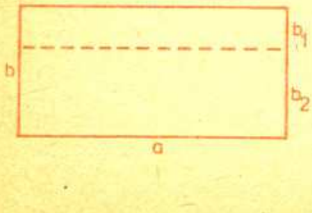
$$P(a, b_1 + b_2) = P(a, b_1) + P(a, b_2). \tag{3}$$

Związki (2) i (3) muszą być prawdziwe dla wszystkich nieujemnych a, b, a_1, a_2, b_1, b_2; są zatem tożsamościami. Nasze zadanie można więc sformułować następująco:

znaleźć funkcję (1), dla której związki (2) i (3) są spełnione tożsamościowo względem wszystkich występujących tam zmiennych.

Tego typu zadania, w których problem polega na wyznaczeniu niewiadomej funkcji na podstawie zadanej tożsamości, którą funkcja ta ma spełniać, noszą nazwę *równań funkcyjnych*.





Związki (2) i (3) są właśnie przykładami równań funkcyjnych.
Zostawmy na chwilę problem wzoru na pole prostokąta i zajmijmy się równaniami funkcyjnymi. Jednym z najważniejszych równań funkcyjnych jest *równanie Cauchy'ego*

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{4}$$

Postarajmy się wyznaczyć funkcję $f\colon \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$ (tj. funkcję o wartościach nieujemnych, określoną dla nieujemnych wartości zmiennej niezależnej) spełniającą związek (4) dla wszystkich nieujemnych x, y. W szczególności (4) ma zachodzić dla $x = y = 0$.
Zastępując w (4) x i y przez zero otrzymamy $f(0) = 2f(0)$, skąd wynika, że

$$f(0) = 0. \tag{5}$$

Przez indukcję łatwo udowodnić, że

$$f(nx) = nf(x) \tag{6}$$

dla wszelkich x nieujemnych i wszelkich n całkowitych nieujemnych. Istotnie, dla $n = 0$ prawdziwość związku (6) wynika z (5). Zakładając, że zachodzi dla pewnego całkowitego $n = k \geqslant 0$ i dla wszelkich $x \geqslant 0$, mamy dla $n = k+1$ i dowolnego $x \geqslant 0$:

$$f((k+1)x) = f(x+kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k+1)f(x),$$

gdzie po drodze wykorzystaliśmy własność (4) dla $y = kx$. Tak więc związek (6) został udowodniony.

Pokażemy z kolei, że związek (6) pozostaje również słuszny dla n wymiernych nieujemnych. Weźmy dowolne liczby całkowite $p \geq 0$, $q > 0$ oraz dowolną liczbę rzeczywistą $x \geq 0$. Mamy na podstawie (6):

$$pf(x) = f(px) = f\left(q\frac{p}{q}x\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right), \quad \text{skąd} \quad f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x).$$

Innymi słowy, funkcja f spełnia związek

(7) $$f(rx) = rf(x)$$

dla wszystkich nieujemnych x rzeczywistych i r wymiernych. Kładąc w (7) w szczególności $x = 1$ i oznaczając $f(1) = c$, otrzymujemy

(8) $$f(r) = cr$$

dla wszystkich nieujemnych r wymiernych.

Udowodnimy teraz, że związek (8) zachodzi nie tylko dla r wymiernych, ale dla dowolnych r rzeczywistych nieujemnych. W tym celu utwórzmy nową funkcję

(9) $$g(x) = f(x) - cx,$$

gdzie, jak wyżej, $c = f(1)$.

Uwzględniając fakt, że funkcja f spełnia równanie (4) w szczególności dla $y = 1$, otrzymamy

$$g(x+1) = f(x+1) - c(x+1) = f(x) + f(1) - cx - c = f(x) - cx = g(x),$$

gdyż $f(1) = c$.

Oznacza to, że funkcja g jest okresowa, o okresie 1, czyli $g(x+1) = g(x)$. Ponieważ wartości funkcji f są nieujemne, a wartość wyrażenia cx dla $x \in \langle 0, 1\rangle$ nie przekracza c, więc z (9) widzimy, że funkcja g spełnia warunek

(10) $$g(x) \geq -c \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

Z okresowości zaś wynika, że nierówność (10) jest słuszna dla wszystkich $x \geq 0$. Weźmy teraz dowolne $x \in \langle 0, 1\rangle$. Na podstawie wzoru (9) oraz równania (4), gdzie przyjmujemy $y = 1 - x$, mamy

$$g(x) + g(1-x) = f(x) - cx + f(1-x) - c(1-x) = f(1) - c = 0, \quad \text{tj.}$$

(11) $$g(x) + g(1-x) = 0.$$

Chcemy pokazać, że funkcja g jest identycznie równa zeru. Gdyby w jakimś punkcie $x \in \langle 0, 1\rangle$ wartość funkcji g była różna od zera, to jak wynika ze związku (11) dokładnie jedna z wartości $g(x)$ i $g(1-x)$ byłaby ujemna. Niech x_0 będzie takim punktem przedziału $\langle 0, 1\rangle$, że $g(x_0) < 0$. Na podstawie (6) mamy dla dowolnych n naturalnych

$$g(nx_0) = f(nx_0) - cnx_0 = nf(x_0) - ncx_0 = n[f(x_0) - cx_0] = ng(x_0).$$

Zatem dla dostatecznie dużego n naturalnego będziemy mieli $g(nx_0) < -c$, co jest sprzeczne z (10). Funkcja g musi więc być tożsamościowo równa zeru, w przedziale $\langle 0, 1\rangle$, a wobec okresowości musi być ona tożsamościowo równa zeru w całym przedziale $\langle 0, +\infty)$. Oznacza to (por. (9)), że

(12) $$f(x) = cx \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in \langle 0, \infty).$$

Tym samym wyznaczyliśmy funkcję f, a więc rozwiązaliśmy równanie (4).

Możemy obecnie rozwiązać równania (2) i (3). Ustalając na chwilę w (2) zmienną b i pisząc $f(x) = P(x, b)$ widzimy, że funkcja f spełnia równanie (4). Musi być zatem postaci (12), gdzie współczynnik c może jednak zależeć od ustalonej chwilowo wartości zmiennej b:

(13) $$P(a, b) = c(b)a.$$

Jeżeli teraz podstawimy wzór (13) do równania (3) i przyjmiemy, że $a = 1$, to otrzymamy $c(b_1 + b_2) = c(b_1) + c(b_2)$, co oznacza, że funkcja c również spełnia równanie (4). (Nie jest istotne czy zmienne niezależne oznaczymy przez x, y, czy przez b_1, b_2). Musi być zatem $c(b) = cb$, gdzie współczynnik c jest już teraz stały. Podstawiając znalezioną postać funkcji c do wzoru (13) otrzymamy

(14) $$P(a, b) = cab.$$

Co robi we wzorze (14) współczynnik c? Jest on związany z jednostką pomiaru pola. Jeśli umówimy się, że kwadrat o boku 1 ma pole jednostkowe, to wówczas $c = 1$. Jeśli jednak np. boki prostokąta mierzyć będziemy w metrach, pole zaś w centymetrach kwadratowych, to $c = 10\,000$. Tak więc nasze rozumowanie dało nam na pole prostokąta wzór (14), ogólniejszy, niż klasyczny wzór $P = ab$, bo uwzględniający jednostki pomiaru.

Zarazem otrzymaliśmy odpowiedź na pytania postawione na początku artykułu. O ile przyjmiemy postulaty **A**, **B**, **C**, to wzór (14) jest jedynym możliwym wzorem na pole prostokąta. Przyjęcie tych postulatów, aczkolwiek dobrze umotywowane intuicją geometryczną, zależy jednak od naszej woli.

Wróćmy teraz do równania (4), ale załóżmy tym razem, że funkcja niewiadoma f jest typu $f{:}(-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$. Możemy wówczas położyć w (4) $y = -x$ i biorąc pod uwagę związek (5) otrzymamy

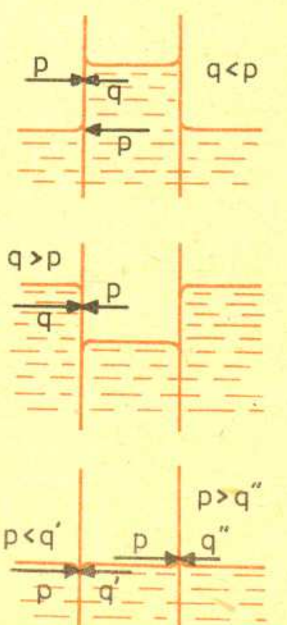
(15) $$f(-x) = -f(x),$$

co oznacza, że f jest funkcją nieparzystą. Ponieważ przy wyprowadzaniu związku (7) nie korzystaliśmy z nieujemności ani x, ani f, więc związek ten jest słuszny i w obecnym przypadku, a z (15) wynika, że (7) zachodzi dla wszystkich x rzeczywistych i r wymiernych. Dalszego rozumowania, prowadzącego do wzoru (12), nie da się jednak powtórzyć, gdyż korzystało ono w bardzo istotny sposób z założenia o nieujemności funkcji f. Jeżeli założymy dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą lub monotoniczną, to ze wzoru (8) (ważnego teraz dla dowolnych wymiernych r) wyniknie wzór (12) (ważny dla dowolnych rzeczywistych x). Jeśli jednak nie założymy o funkcji nic więcej ponadto, że spełnia ona równanie (4), to czy może mieć ona inną postać niż (12)?

Pytanie to nurtowało matematyków przez wiele lat, a odpowiedź okazała się zupełnie nieoczekiwana: zależy ona od tego, jaką matematykę przyjmiemy. Gdyż matematyka jest systemem dedukcyjnym i zależy od przyjętego układu aksjomatów. Tak, jak możemy mieć różne geometrie (geometria euklidesowa i różne geometrie nieeuklidesowe), tak też możemy mieć

Rozwiązanie zadania F 77

Ciśnienie w powietrzu oraz w cieczy na jej poziomej powierzchni jest równe ciśnieniu atmosferycznemu p. W związku z tym ciśnienie wywierane na zanurzoną część płyty przez ciecz tworzącą menisk wklęsły jest mniejsze od ciśnienia atmosferycznego, zaś przez ciecz tworzącą menisk wypukły musi być większe od ciśnienia atmosferycznego. Dzięki zjawisku włoskowatości nie ma równowagi ciśnień działających na zewnętrzne i wewnętrzne płaszczyzny płyt. Widać to łatwo na rysunku, którego analiza przekonuje, że płyty w przypadku (a) i (b) przyciągają się, podczas gdy w przypadku (c) odpychają.



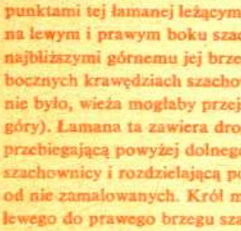
różne matematyki. Jeżeli do układu aksjomatów, na których oprzemy naszą matematykę, włączymy tzw. pewnik wyboru, to — jak pokazał w 1905 roku matematyk niemiecki G. Hamel — równanie (4) ma również rozwiązanie nie wyrażające się wzorem (12). Istnieją jednak matematyki, w których funkcje (12) są jedynymi rozwiązaniami równania (4).

Rozwiązania równania (4), różne od funkcji (12), są bardzo nieregularne i mają bardzo osobliwe własności. Nie są one ograniczone ani z góry, ani z dołu na żadnym przedziale, ich wykresy są gęste na płaszczyźnie i nie dadzą się one zapisać efektywnym wzorem.

Oczywiście istnieje dużo innych równań funkcyjnych, postacią i własnościami nieraz bardzo różniących się od podanego tutaj przykładu. Niektóre typy równań funkcyjnych, jak np. równania różniczkowe czy całkowe, wyodrębniły się dziś w osobne dyscypliny matematyczne. Obecnie pod nazwą ,,*równania funkcyjne*'' rozumie się takie równania funkcyjne, w których nie występują pochodne ani całki. Nawet po tym ograniczeniu bogactwo i rozmaitość różnych rodzajów i typów równań funkcyjnych są ogromne. Jeśli dodamy ponadto, że równania funkcyjne pojawiają się w niemal wszystkich dziedzinach matematyki, stanie się jasne, że stanowią one fascynujący przedmiot badań naukowych. Wśród pionierów tych badań znajdują się również najwybitniejsi matematycy polscy, jak Wacław Sierpiński czy Stefan Banach. A dzisiaj w badaniach nad równaniami funkcyjnymi matematycy polscy odgrywają czołową rolę na świecie.

Rozwiązanie zadania M 235

Powiększmy szachownicę, dodając przy jej dolnym brzegu jeden rząd pól nie zamalowanych, i rozpatrzmy obszar A złożony ze wszystkich pól, do których może dotrzeć wieża wychodząc z dodanego rzędu i nie przechodząc przez pola zamalowane. Teza naszego zadania jest równoważna temu, że A zawiera pewne pole przy górnym brzegu szachownicy. Przypuśćmy, że tak nie jest. Dołączając do A wszystkie pola leżące całkowicie wewnątrz niego, otrzymamy nowy obszar B, również nie zawierający pól przy górnym brzegu szachownicy, którego brzegiem jest zamknięta łamana. Niech teraz a i b będą punktami tej łamanej leżącymi odpowiednio na lewym i prawym boku szachownicy i najbliższymi górnemu jej brzegowi (gdyby na bocznych krawędziach szachownicy takich pól nie było, wieża mogłaby przejść z dołu do góry). Łamana ta zawiera drogę łączącą a i b przebiegającą powyżej dolnego brzegu szachownicy i rozdzielającą pola zamalowane od nie zamalowanych. Król może przejść od lewego do prawego brzegu szachownicy po zamalowanych polach przyległych do tej drogi — wbrew założeniu.



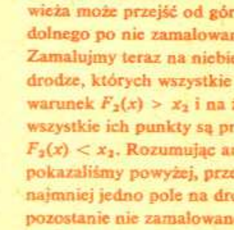
pole zamalowane

obszar B

droga króla

Rozwiązanie zadania M 236

Zamalujmy na czerwono te pola, dla których $F_1(x) < x_1$ dla wszystkich x leżących we wnętrzu lub na brzegu pola, a na zielono pola, dla których $F_1(x) > x_1$ dla wszystkich punktów pola domkniętego. Ponieważ na lewym brzegu nie mogą leżeć pola czerwone, na prawym — pola zielone i dwa pola różnych kolorów nie mogą się dotykać, król nie może przejść od lewego brzegu szachownicy do prawego nie wchodząc na pole nie zamalowane. Wobec tego (p. zad. M 235) wieża może przejść od górnego brzegu do dolnego po nie zamalowanych polach. Zamalujmy teraz na niebiesko te pola na jej drodze, których wszystkie punkty spełniają warunek $F_2(x) > x_2$ i na żółto te pola, że wszystkie ich punkty są przesuwane „w dół": $F_2(x) < x_2$. Rozumując analogicznie, jak to pokazaliśmy powyżej, przekonamy się, że co najmniej jedno pole na drodze wieży i teraz pozostanie nie zamalowane. Znaczy to, że istnieją w tym polu punkty p, q, r, s spełniające warunki zadania.



→ pola zielone

← pola czerwone

droga wieży

↓ pola żółte

↑ pola niebieskie

pole znalezione

Rozwiązanie zadania M 237

Możemy założyć, że długość boku kwadratu wynosi 1. Przeprowadzając konstrukcję opisaną w zadaniu M 236 dla $n = 2, 4, 8, \dots 2^k, \dots$ przekonamy się, że istnieją ciągi (p_k), (q_k), (r_k), (s_k) takie, że p_k, q_k, r_k, s_k leżą w jednym kwadracie o boku 2^{-k} oraz $F_1(p_k) \leqslant p_{k,1}$, $F_1(q_k) \geqslant q_{k,1}$, $F_2(r_k) \leqslant r_{k,2}$, $F_2(s_k) \geqslant s_{k,2}$; dolne wskaźniki 1, 2 oznaczają numery współrzędnych. Z ciągu (p_k) można wybrać podciąg (p_{k_l}) zbieżny do pewnego punktu x kwadratu. Ale do tego samego punktu będą zbieżne ciągi (q_{k_l}), (r_{k_l}) i (s_{k_l}). Ponieważ teraz F_1 i F_2 są funkcjami ciągłymi, więc

$$F_1(x) = \lim_{l \to \infty} F_1(p_{k_l}) \leqslant \lim_{l \to \infty} p_{k_l,1} = x_1$$

i analogicznie $F_1(x) \geqslant x_1$, $F_2(x) \leqslant x_2$ oraz $F_2(x) \geqslant x_2$, skąd wynika, że $F_1(x) = x_1$ i $F_2(x) = x_2$, czyli $F(x) = x$, c.b.d.o.