O geometrii wewnętrznej

Prof. dr Karol BORSUK, członek rzeczywisty PAN

Przestrzeń metryczną A (z metryką ϱ) nazywamy *geometrycznie dopuszczalną* (symbolicznie $A \in GA$), jeśli spełnia warunki: dowolne dwa punkty $x, y \in A$ można połączyć łukiem L o skończonej długości zawartym w A oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ każdy punkt $x \in A$ ma otoczenie U takie, że każde $y \in U$ można połączyć z x łukiem $L \subset A$ o długości $|L| < \varepsilon$.

Połóżmy

$\varrho_A(x, y) =$ kres dolny długości L, gdzie L jest łukiem zawartym w A zawierającym x i y.

Otrzymamy tak metrykę zwaną *metryką wewnętrzną* w A. Zauważmy, że $\varrho(x, y) \leqslant \varrho_A(x, y)$ i że takie pojęcie metryki wewnętrznej jest zgodne z potocznym znaczeniem terminu odległość.

Przekształcenie f przestrzeni A z GA na drugą przestrzeń $B \in GA$ nazywamy *izometrią wewnętrzną*, jeśli

$$\varrho_A(x, y) = \varrho_B(fx, fy) \text{ dla dowolnych } x, y \in A.$$

Teorię niezmienników izometrii wewnętrznych (to znaczy tych własności przestrzeni GA, które są zachowywane przy izometriach wewnętrznych) nazywamy *geometrią wewnętrzną*. Należy podkreślić, że w klasycznej geometrii różniczkowej znaczenie tego pojęcia jest inne z uwagi na warunki regularności nakładane w niej na rozpatrywane przekształcenia i przestrzenie.

W szczególności krzywizna Gaussa, która jest jednym z najważniejszych niezmienników geometrii wewnętrznej rozumianej klasycznie, nie jest niezmiennikiem wewnętrznym w znaczeniu zdefiniowanym powyżej. Celem pracy jest podanie szkicu dowodu następującego

Twierdzenia: *Istnieje izometria wewnętrzna f przekształcająca całą n-wymiarową przestrzeń euklidesową E^n na podzbiór $f(E^n)$ przestrzeni E^{2n} o dowolnie małej średnicy.*

Niech η będzie liczbą dodatnią. Oznaczmy przez D kwadrat leżący w E^2 o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, \eta)$, $(\eta, 0)$ i (η, η) — jego średnica jest równa $\eta\sqrt{2}$. Każdej liczbie całkowitej k przyporządkujmy punkt

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\eta\left(1+\frac{k}{|k|+1}\right), 0\right) \in E^2.$$

Mamy $a_k \in D \subset E^2$ i $\varrho((0, 0), a_k) < \varrho((0, 0), a_{k+1})$. Niech b_k będzie takim punktem D, że $\varrho(a_k, b_k) = \varrho(b_k, a_{k+1}) = \eta$ i przez I_k oznaczmy odcinek $\langle k\cdot\eta, (k+1)\eta\rangle \subset E^1$. Wówczas $E^1 = \bigcup\limits_k I_k$ i oznaczając dla każdego k $J_{2k} = \overline{a_k b_k}$, $J_{2k+1} = \overline{b_k a_{k+1}}$ z łatwością stwierdzamy istnienie takiej izometrii wewnętrznej φ,

$$\varphi : E^1 \to \bigcup_k J_k,$$

że $\varphi(2k\cdot\eta) = a_k$, $\varphi((2k+1)\eta) = b_k$ dla każdej liczby całkowitej k.

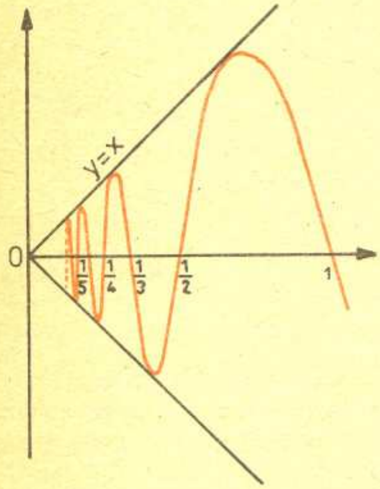
Zauważmy, że przestrzeń E^n można przedstawić jako sumę wszystkich n-wymiarowych kostek postaci

$$D_{\mu_1, \dots, \mu_n} = I_{\mu_1} \times \dots \times I_{\mu_n},$$

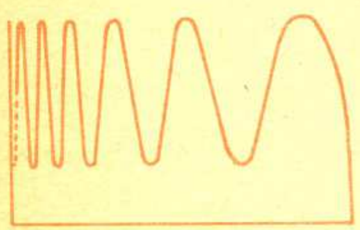
gdzie $\mu_1, \dots, \mu_n$ przebiega zbiór wszystkich n-tek złożonych z liczb całkowitych. Kładąc dla każdego $x \in E^n$ $f(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ otrzymujemy homeomorfizm E^n na pewien otwarty podzbiór kostki $2n$-wymiarowej przeprowadzający każdą kostkę $D_{\mu_1, \dots, \mu_n}$ izometrycznie na $J_{\mu_1} \times \dots \times J_{\mu_n}$.

Ostatni zbiór jest podzbiorem C, produktu kartezjańskiego kwadratów o średnicy $\eta\sqrt{2}$. Nietrudno pokazać, że f jest izometrią wewnętrzną. Jeśli η jest dostatecznie małe, to i średnica C, a zatem i średnica obrazu $f(E^n)$ może być dowolnie mała, tak, jak żądaliśmy.

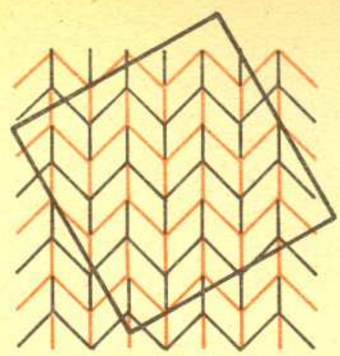
Uwaga 1. Zgodnie z naszym twierdzeniem przestrzeń E^3, która w klasycznej mechanice jest traktowana jako matematyczny odpowiednik całego uniwersum kosmicznego, może być też rozpatrywana jako dowolnie mały podzbiór przestrzeni E^6 z nie zmienioną metryką wewnętrzną.

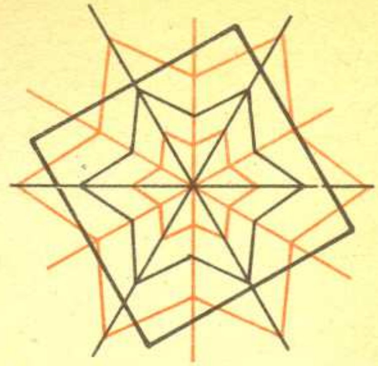


Ta przestrzeń nie jest geometrycznie dopuszczalna. Długości kolejnych łuków „sinusoidy" pomiędzy dwoma kolejnymi grzbietami są większe od odpowiednich wyrazów rozbieżnego szeregu harmonicznego. Zatem długość widocznej na rysunku krzywej jest nieskończona.



Dla tej przestrzeni można wskazać $\varepsilon > 0$ i punkt x takie, że w każdym otoczeniu x istnieje y o własności $\varrho_A(x, y) \geqslant \varepsilon$. Nie jest ona zatem geometrycznie dopuszczalna.

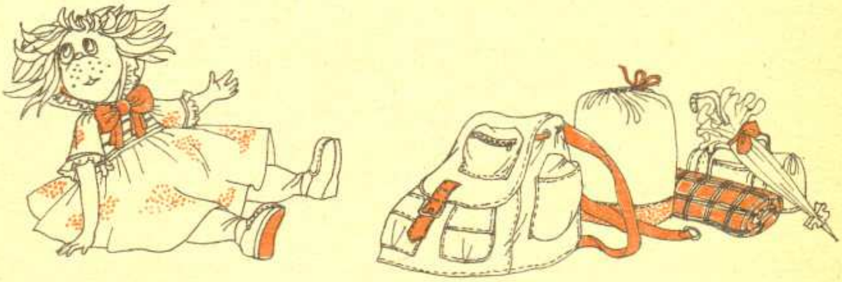




Uwaga 2. J. Olędzki i S. Spież udowodnili ostatnio mocniejsze twierdzenie, które głosi, że E^n jest wewnętrznie izometryczna z podzbiorem E^{n+1} o dowolnie małej średnicy. Główna idea dowodu jest podobna do opisanej powyżej, ale dowód wymaga bardziej skomplikowanych uzasadnień.

Uwaga 3. Podana powyżej izometria wewnętrzna f, która przekształca E^n na podzbiór E^{2n} o dowolnie małej średnicy, składa się z przekształceń nie będących dyfeomorfizmami. Jednakże przez drobną modyfikację konstrukcji można otrzymać tu izometrię wewnętrzną używającą jedynie funkcji, które mają pochodne wszystkich rzędów.

Uwaga 4. W geometrii wewnętrznej jest jeszcze wiele otwartych problemów. W szczególności nie wiadomo, czy znane „Einbettungssatz" Mengera i Nöbelinga można przenieść do geometrii wewnętrznej w postaci twierdzenia orzekającego, że każda n-wymiarowa GA-przestrzeń jest wewnętrznie izomorficzna z podzbiorem E^{2n+1}.



Ponad 50 rzędów wielkości, czyli przewodnictwo ciał stałych

Dr Andrzej HENNEL

Jaka wielkość fizyczna zmienia się w największym zakresie wielkości?
Odpowiedź na to pytanie wydaje się być prosta. Jeżeli obliczymy bowiem stosunek przypuszczalnej masy Wszechświata (ok. 10^{50} kg) do masy elektronu (ok. 10^{-30} kg), otrzymamy 80 rzędów wielkości. Stosunek promienia Wszechświata (ok. 10^{26} m) do promienia nukleonu (ok. 10^{-15} m), czy też stosunek czasu życia Wszechświata (ok. 10^{18} s) do czasu życia niektórych cząstek elementarnych (ok. 10^{-23} s) dają nam po 41 rzędów wielkości.
W obu przypadkach porównujemy jednak własności największego znanego obiektu fizycznego (Wszechświata) z własnościami najmniejszych znanych obiektów (cząstek elementarnych).
Istnieje jednak makroskopowa wielkość, którą można mierzyć w laboratorium, zmieniająca się o ponad 50 rzędów wielkości. Jest nią przewodnictwo właściwe ciał stałych. Obecnie uważamy, że zakres zmian przewodnictwa właściwego rozciąga się co najmniej od 10^{24} $(\Omega\text{cm})^{-1}$ do 10^{-30} $(\Omega\text{cm})^{-1}$, jednakże w miarę rozwoju badań granice te mogą ulec dalszemu poszerzeniu.

Definicja przewodnictwa właściwego

Przewodnictwo właściwe wprowadziła już fizyka XIX wieku ustalając, że opór przewodnika można wyrazić wzorem

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S},$$

gdzie l jest długością, a S przekrojem poprzecznym przewodnika, natomiast σ — stałą materiałową nazywaną przewodnictwem właściwym i wyrażaną w $(\Omega\text{cm})^{-1}$.