Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 11/1982

Edward Orzechowski	- Warszawa	45,01pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	43,43pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	42,47pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	35,50pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	32,20pkt
Krzysztof Trautman	- Warszawa	28,04pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	24,06pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	23,22pkt

i z numeru 12/1982

Paweł Kamiński	- Warszawa	49,10pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	43,43pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	42,42pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	38,83pkt
Krzysztof Trautman	- Warszawa	32,51pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	29,84pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	27,28pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	26,92pkt

Współczynniki trudności zadań:

37	38	39	40	41	42
1,85	1,43	2,67	2,71	2,86	2,70

W Klubie 44 znaleźli się kolejni dwaj uczestnicy konkursu ligowego: pan Edward Orzechowski i pan Paweł Kamiński - obaj z Warszawy. Witamy - i czekamy na następnych.

Pan Jerzy Janowicz jest już za półmetkiem "drugiego okrążenia" !

Następna "podwójna" tabela w nr. 8/1983

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Klub 44

Przypominamy treść zadań z nr. 2 i 3/1983

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

46. Ile pierwiastków ma równanie $a^x = \log_a x$?

47. Dowieść, że każda liczba naturalna ma wielokrotność, której zapis dziesiętny składa się tylko z zer i jedynek.

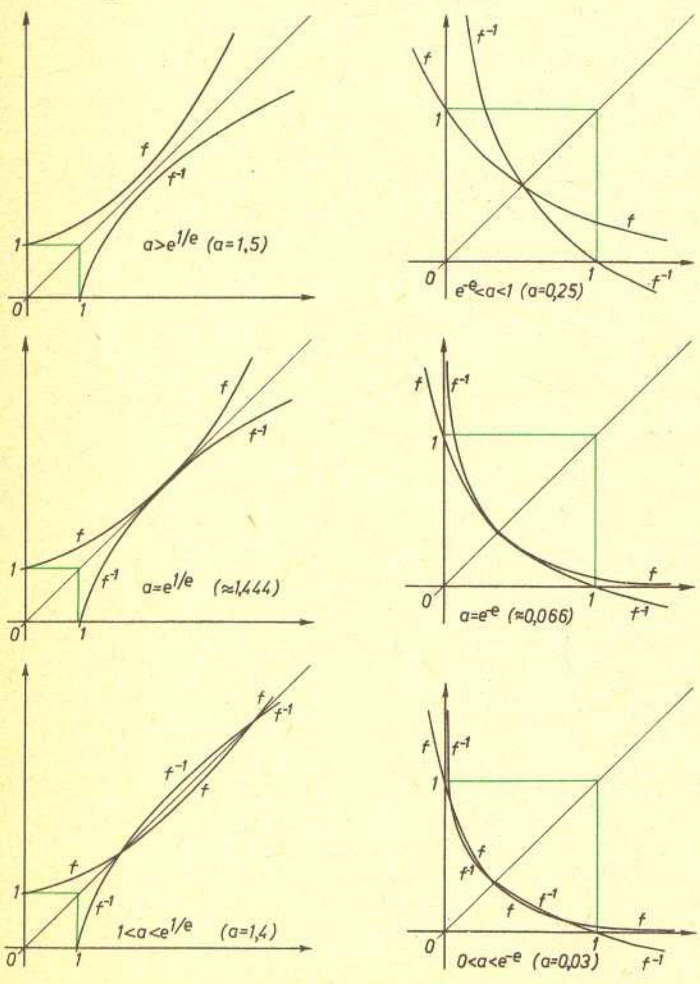
48. Spośród wierzchołków sześciowymiarowej kostki I^6 wybrano losowo trzy. Co jest bardziej prawdopodobne: czy utworzą one trójkąt ostrokątny czy prostokątny?

49. W n-tym wierszu trójkąta Pascala jest P_n liczb parzystych i N_n liczb nieparzystych. Znaleźć wszystkie wartości n, dla których a) $P_n = N_n$, b) $P_n = N_n+1$, c) $P_n = N_n-1$.

50. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w koło boki BC i CD są równej długości. Dowieść, że przekątna AC jest dłuższa od $\frac{1}{2}(AB+AD)$.

51. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

Rozwiązania zadań z numeru 2/1983



Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $f^{-1}(x) = \log_a x$ dla różnych wartości parametru a

46. *Lemat.* Funkcja $\varphi(t) = (1/t)\ln t$ w przedziale $0 < t < e$ rośnie od $-\infty$ do $1/e$, a w przedziale $e < t < \infty$ maleje od $1/e$ do 0. W punkcie $t = e$ osiąga swą wartość maksymalną równą $1/e$. (Dowód banalny przy użyciu rachunku różniczkowego).

Rozwiązanie zadania w przypadku, gdy $a > 1$. Niech $f(x) = a^x$. Wówczas $f^{-1}(x) = \log_a x$. Każdy punkt stały funkcji f (czyli taki punkt x, że $f(x) = x$) jest pierwiastkiem równania $f(x) = f^{-1}(x)$. Innych pierwiastków nie ma; wynika to z wypukłości f i wklęsłości f^{-1} (szczegóły pomijamy — patrz rysunki). Punkty stałe funkcji f to pierwiastki równania $(1/x)\ln x = \ln a$. Z lematu wynika, że równanie to ma dwa pierwiastki, gdy $\ln a < 1/e$, ma jeden pierwiastek, gdy $\ln a = 1/e$, nie ma pierwiastków, gdy $\ln a > 1/e$ (czyli, odpowiednio, gdy $a < e^{1/e}$, $a = e^{1/e}$, $a > e^{1/e}$).

Rozwiązanie zadania w przypadku, gdy $0 < a < 1$. Dane równanie jest równoważne równaniu $g(x) = 0$, gdzie $g(x) = a^x-\log_a x = e^{-cx}+(1/c)\ln x$, $c = -\ln a > 0$. Granice funkcji g przy $x \to 0+$ i $x \to +\infty$ wynoszą odpowiednio $-\infty$ i $+\infty$, zaś jej pochodna równa się

$$g'(x) = -ce^{-cx}+\frac{1}{cx} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{c}-\varphi(e^{cx})\right] \qquad \left(\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}\right).$$

Jeśli $c \leqslant e$ (czyli $a \geqslant e^{-e}$), to zgodnie z lematem wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest nieujemne (dodatnie poza co najwyżej jednym punktem), zatem funkcja g jest ściśle rosnąca i równanie $g(x) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek.
Jeśli $c > e$ (czyli $a < e^{-e}$), to na mocy lematu wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest ujemne w pewnym przedziale (α, β), a dodatnie poza $\langle\alpha, \beta\rangle$, zatem funkcja g jest monotoniczna (rosnąca—malejąca—rosnąca) w przedziałach $(0, \alpha)$, (α, β), (β, ∞) i równanie $g(x) = 0$ ma nie więcej niż trzy pierwiastki. Aby się przekonać, że ma ono dokładnie trzy pierwiastki, wystarczy znaleźć punkty x_1, x_2 takie, że $0 < x_1 < x_2$, $g(x_1) > 0 > g(x_2)$. Otóż warunki te spełniają na przykład liczby $x_1 = 1/c$, $x_2 = \varphi(c)$, bowiem $g(x_1) = (1/e)-\varphi(c) > 0$, $g(x_2) = (1/c)\ln(e\varphi(c)) < 0$; napisane nierówności wynikają natychmiast z lematu.

Reasumując: Liczba pierwiastków rozważanego równania wynosi

$$\begin{cases} 3 & \text{gdy } 0 < a < e^{-e} \\ 1 & \text{gdy } e^{-e} \leqslant a < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 & \text{gdy } 1 < a < e^{1/e} \\ 1 & \text{gdy } a = e^{1/e} \\ 0 & \text{gdy } a > e^{1/e} \end{cases}$$

Uwaga. Zadanie to ma wyraźny związek z zadaniami 13 i 25 („*Delta*" 1/1982 i 7/1982 — teksty, „*Delta*" 5/1982 i 11/1982 — rozwiązania); badanie liczby pierwiastków równania $a^x = \log_a x$ stanowiło jedną z metod rozwiązania obu tamtych zadań.

47. Niech j_n będzie liczbą, której zapis dziesiętny składa się z n jedynek, a r_n — resztą z dzielenia j_n przez N (gdzie N jest daną liczbą naturalną). Ponieważ reszty r_n mają tylko skończenie wiele wartości, w ciągu tych reszt muszą występować powtórzenia. Niech więc $r_n = r_m$, $n > m$. Różnica $j_n - j_m$ jest wtedy liczbą podzielną przez N, a jej zapis składa się z $n-m$ jedynek i m zer.

48. Podamy rozwiązanie w przypadku kostki I^n (dowolnego wymiaru). Niech A, O, B będą trzema wierzchołkami tej kostki takimi, że $\sphericalangle AOB = 90°$. Wybierzmy układ współrzędnych tak, by punkt O był jego początkiem, a pozostałe wierzchołki kostki I^n były punktami o współrzędnych 0 i 1. We współrzędnych punktów A i B jedynki występują na różnych pozycjach, bo tylko wtedy iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jest zerem. Zatem trójkątów prostokątnych o wierzchołkach w rogach kostki I^n, z kątem prostym przy wierzchołku O, jest tyle, na ile sposobów można wybrać dwa rozłączne niepuste podzbiory zbioru numerów $\{1, \ldots, n\}$. Liczba ta równa się $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(2^{n-k}-1)$.

$\Big($Uzasadnienie: k numerów można wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, a spośród pozostałych $n-k$ numerów można wybrać podzbiór niepusty na $2^{n-k}-1$ sposobów$\Big)$. Mnożymy teraz tę liczbę przez 2^n (bo tyle wierzchołków ma kostka I^n, a w każdym z nich można umieścić punkt O) i dzielimy przez $\binom{2^n}{3}$, czyli liczbę wszystkich trójkątów możliwych do utworzenia. Otrzymany iloraz jest prawdopodobieństwem wybrania trójkąta prostokątnego:

$$\left[2^n \cdot \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(2^{n-k}-1)\right] : \left[\frac{1}{6}\cdot 2^n(2^n-1)(2^n-2)\right] =$$

$$= 3\left[2^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right] : [(2^n-1)(2^n-2)] =$$

$$= 3\left[2^n\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) - (2^n-1)\right] : [(2^n-1)(2^n-2)] =$$

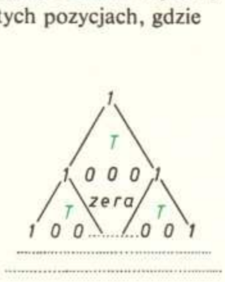
$$= [3(3^n - 2^{n+1} + 1)] : [(2^n-1)(2^n-2)].$$

Dla $n = 6$ wynik równa się w przybliżeniu 0,46236559.., a więc nieco bardziej prawdopodobne jest wybranie trójkąta ostrokątnego.

Rozwiązania zadań z numeru 3/1983

49. Podany obok schemat przedstawia trójkąt Pascala napisany *modulo* 2: zera i jedynki znajdują się na tych pozycjach, gdzie w zwykłym trójkącie Pascala są, odpowiednio, liczby parzyste i nieparzyste. W każdym wierszu, którego numer jest potęgą dwójki, wszystkie wyrazy — z wyjątkiem skrajnych jedynek — są zerami (czyli wartości symbolu Newtona „n nad k" dla $n = 2^m$, $0 < k < n$, są parzyste — pomijamy prościutki dowód tego faktu).

```
       1
      1 1
     1 0 1
    1 1 1 1
   1 0 0 0 1
  1 1 0 0 1 1
 1 0 1 0 1 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 1
.................
```



Ustalmy m i niech T oznacza część trójkąta utworzoną przez wiersze o numerach od 0 do $2^m - 1$. Wówczas w wierszach od 2^m do $2^{m+1}-1$ tworzą się dwa rozłączne trójkąty, identyczne z T, ich wierzchołkami są wspomniane skrajne jedynki wiersza 2^m. Trójkąty te oddzielone są blokiem złożonym z samych zer. Zatem liczba jedynek w każdym wierszu, którego numer nie jest postaci 2^m, jest równa podwojonej liczbie jedynek w pewnym wierszu wcześniejszym. Stąd przez łatwą indukcję wynika, że liczba jedynek N_n w każdym wierszu jest potęgą dwójki. Jeśli teraz $P_n - N_n$ równa się ± 1 lub 0, to $n = N_n + P_n - 1 = 2N_n + (P_n - N_n) - 1$ jest liczbą postaci 2^k lub $2^k - 1$ lub $2^k - 2$. Dla takich n, odpowiednio, n-ty wiersz jest typu 1000...0001, 1111...111, 10101...101. Stąd odpowiedź: a) równość $P_n = N_n$ jest niemożliwa, b) $P_n = N_n + 1$ tylko dla $n = 4$, c) $P_n = N_n - 1$ dla $n = 2^k - 2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

50. Oznaczmy przez O i r środek i promień koła, a przez x i y miary połówek kątów AOD i AOB. Mamy więc: $x > 0$, $y > 0$, $x + y < \pi$, $\sphericalangle AOD = 2x$, $\sphericalangle AOB = 2y$, $\sphericalangle COB = \sphericalangle COD = \pi - (x+y)$, $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD + \sphericalangle COD = \pi + x - y$, skąd $AD = 2r\sin x$, $AB = 2r\sin y$, $AC = 2r\sin(\pi + x - y)/2 = 2r\cos(x-y)/2$. Wobec tego

$$\frac{1}{2}(AD + AB) = r(\sin x + \sin y) =$$

$$= 2r\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} < 2r\cos\frac{x-y}{2} = AC.$$

51. Skorzystamy z przedstawienia liczby e w postaci sumy szeregu $\Sigma\, 1/n!$. Niech s_n oznacza n-tą sumę częściową, a $r_n = e - s_n$ resztę. Zatem

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!},$$

$$\sin(2\pi e n!) = \sin(2\pi n! s_n + 2\pi n! r_n) = \sin(2\pi n! r_n);$$

ostatnia równość bierze się stąd, że $n!s_n$ jest liczbą całkowitą. Ponieważ $(n+k)! = n!(n+1)(n+2)\ldots(n+k) > n!(n+1)^k$, więc

$$2\pi n! r_n = 2\pi n! \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!} \begin{cases} < \\ > \end{cases}$$

$$< 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = 2\pi\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{2\pi}{n}$$

$$> 2\pi n!\frac{1}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1}.$$

Gdy $n > 4$, wszystkie człony otrzymanych nierówności są liczbami z przedziału $(0, \pi/2)$ i z monotoniczności funkcji sinus w tym przedziale wnosimy, że $\sin\frac{2\pi}{n+1} < \sin 2\pi n! r_n < \sin\frac{2\pi}{n}$, co można przepisać w postaci

$$2\pi\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{2\pi}{n+1}} < n\sin(2\pi n! r_n) < 2\pi\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}.$$

Stąd, w myśl znanego wzoru $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, na mocy twierdzenia o trzech ciągach,

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = \lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi n! r_n) = 2\pi.$$