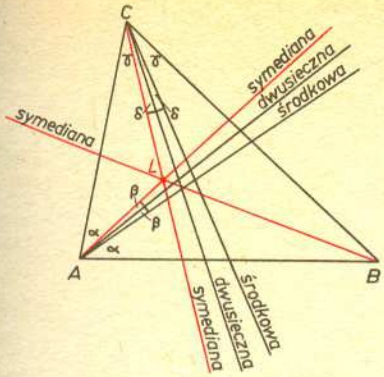


Rys. 11. Z równości zaznaczonych kątów i trygonometrycznej postaci twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy wynika, że trzy symediany trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

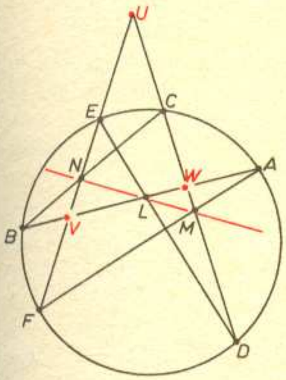
Twierdzenie 6. Nazwijmy *symedianą* (symetryczną medianą, mediana = = środkowa) odbicie symetryczne środkowej w dwusiecznej wychodzącej z tego samego wierzchołka trójkąta. Wówczas:
Trzy symediany trójkąta przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem *Lémoine'a* lub punktem *Grebesche'a*).

Dowód. Samo wychodzi z twierdzenia odwrotnego do Cevy w wersji trygonometrycznej (rys. 11).

I o tak ślicznym twierdzeniu nie wspomina się teraz w szkole! Słowo ,,teraz'' zostało użyte rozmyślnie: prawie połowę artykułu ,,ściągnęliśmy'' ze znanego w latach dwudziestych i trzydziestych podręcznika Jana Zydlera.

A teraz nieco trudniejsze zadanie: udowodnić następujące **twierdzenie Pascala**:

Jeśli przeciwległe boki sześciokąta $ABCDEF$ wpisanego w okrąg przecinają się w punktach L, M, N, to punkty te leżą na jednej prostej.



Rys. 12

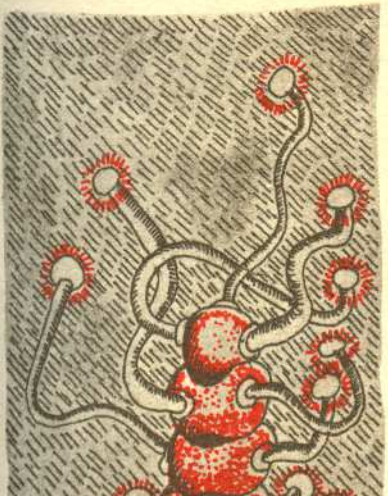
Dowód. Oznaczmy przez U punkt przecięcia prostych EF i CD, przez V — punkt przecięcia AB i EF, przez W punkt przecięcia AB i CD. Stosując twierdzenie Menelausa do trójkąta UVW i, kolejno, prostych ED, AF, BC, a potem mnożąc otrzymane równości otrzymujemy, że dziewięć ułamków daje w iloczynie (-1). Ponieważ jednak

$$(*)\qquad \begin{aligned} \overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{VB} &= \overrightarrow{VE}\cdot\overrightarrow{VF} \\ \overrightarrow{WA}\cdot\overrightarrow{WB} &= \overrightarrow{WC}\cdot\overrightarrow{WD} \\ \overrightarrow{UE}\cdot\overrightarrow{UF} &= \overrightarrow{UC}\cdot\overrightarrow{UD}, \end{aligned}$$

więc $\dfrac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = -1$. Punkty L, M, N w myśl odwrotnego twierdzenia Menelausa leżą na prostej.

Sądzimy, że Czytelnik potrafi przeprowadzić dowód w przypadku, gdy rysunek wygląda inaczej niż rys. 12 i wie, skąd wzięły się równości (*).

Zadania



Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 331. Uogólnić znany wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na przypadek sumy n zbiorów. (Symbol $|X|$ oznacza liczbę elementów skończonego zbioru X).
Rozwiązanie na str. 13

M 332. Niech $\varphi(n)$ będzie liczbą mniejszych od n liczb naturalnych względnie pierwszych z $n (n > 1)$. Niech $p_1, \ldots, p_m$ będą czynnikami pierwszymi n. Wykazać, że

$$\varphi(n) = n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

Rozwiązanie na str. 11

M 333. Udowodnić, że jeżeli $\sigma(n)$ jest sumą wszystkich naturalnych dzielników liczby n $(n > 1)$, to $\varphi(n)\sigma(n) < n^2$. Wykazać, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje n takie, że $\varphi(n)\sigma(n) > n^2(1-\varepsilon)$.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 136. Na poziomej powierzchni z tarciem (współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego są równe i wynoszą f) spoczywa klocek (masa m) przytwierdzony do sprężyny o stałej sprężystości k. Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony, a ona sama zajmuje położenie poziome i nie jest napięta. O ile należy przesunąć klocek wzdłuż osi sprężyny, aby po puszczeniu powrócił do pierwotnego położenia? Opór powietrza oraz tarcie wewnętrzne sprężyny możemy pominąć.
Rozwiązanie na str. 15