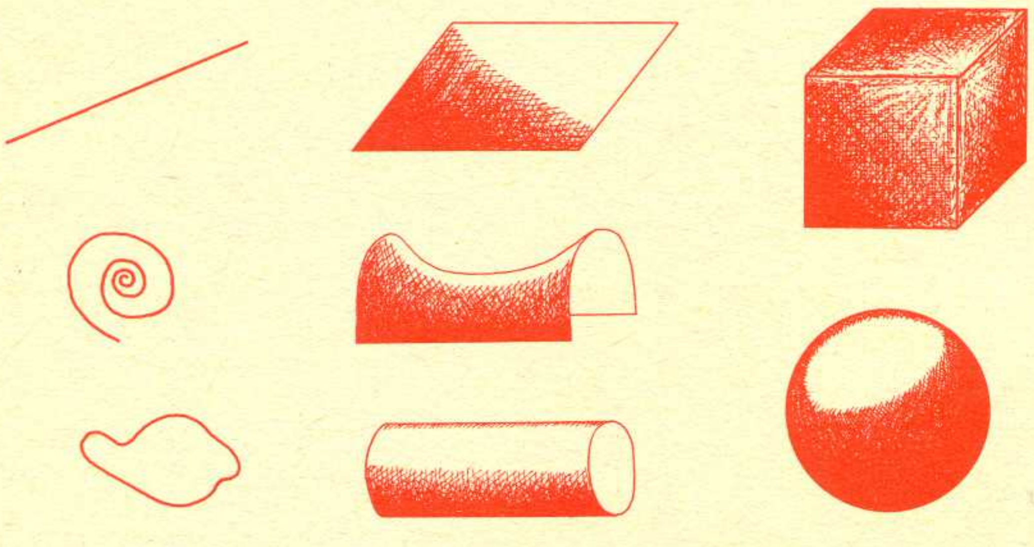
Pojęcie wymiaru w topologii

Doc. dr Teodor PRZYMUSIŃSKI

Teoria wymiaru jest jednym z najpiękniejszych działów topologii. Będące przedmiotem jej badań pojęcie *wymiaru przestrzeni topologicznej* ma głęboko intuicyjną treść, prowadząc jednocześnie do wielu ciekawych i trudnych twierdzeń.

Któż z nas nie zastanawiał się kiedyś nad sensem pojęcia wymiaru figury geometrycznej i nie zadawał sobie pytania, dlaczego intuicja podpowiada nam, że jedne figury są jednowymiarowe, inne dwuwymiarowe, a jeszcze inne trójwymiarowe. Łatwo się każdy zgodzi, że cienki (tzn. taki, którego grubość można pominąć) kawałek drutu, prosty lub też dowolnie powyginany, czy też uformowany w okrąg lub inną figurę zamkniętą, jest tworem jednowymiarowym. Podobnie, nie budzi wątpliwości dwuwymiarowość powierzchni otrzymanej z kawałka cienkiej blachy powyginanej w dowolny sposób lub np. zwiniętej w rurkę. Za dwuwymiarową uznamy również bez wahania powierzchnię balonika o dowolnym kształcie. Nikt rozsądny nie będzie negował trójwymiarowości sześcianu czy też kuli.

które nie rozcina tej figury ani nie powoduje sklejenia żadnych jej punktów. A zatem, przekształcenie polegające na sklejeniu (zlutowaniu) końców odcinka (drutu) w okrąg homeomorfizmem nie jest, podobnie jak nie jest nim przekształcenie polegające na rozcięciu papierowej rurki i otrzymaniu z niej płaskiego prostokąta. Homeomorfizmem jest jednak każde przekształcenie polegające na dowolnym wyginaniu, rozciąganiu lub kurczeniu figury. Dla zrozumienia pojęcia homeomorfizmu wygodnie jest wyobrażać sobie, że wszystkie figury wykonane są z nieskończenie elastycznej gumy.
Dwie figury nazywamy *homeomorficznymi*, gdy istnieje przekształcenie homeomorficzne jednej z nich na drugą. Na przykład prosty kawałek drutu jest homeomorficzny z powyginanym kawałkiem drutu dowolnej długości, okrąg jest homeomorficzny z elipsą, a nadmuchany balonik z balonikiem pozbawionym powietrza. Nietrudno wykazać natomiast, że odcinek nie jest homeomorficzny z okręgiem, bo otrzymanie jednej z tych figur z drugiej wymaga rozcinania bądź sklejenia. Z punktu widzenia topologii dwie figury homeomorficzne są uznane za *identyczne* lub *topologicznie nierozróżnialne*.
Topologia zaś — jak już powiedzieliśmy wyżej — zajmuje się badaniem *niezmienników homeomorfizmów*, tj. badaniem tych własności figur, które zachowują się, tzn. nie ulegają zmianie przy przekształceniach homeomorficznych. Przykładem takiej własności jest np. *spójność*, czyli — mówiąc prościej — własność tworzenia przez figurę jednej całości. W szczególności zatem



Rys. 1. Przykłady figur jedno, dwu i trójwymiarowych

A jednak znalezienie właściwej definicji wymiaru, mimo iż jest to pojęcie tak bardzo intuicyjne, okazało się trudne. Zaczęto zajmować się tym zagadnieniem już w latach osiemdziesiątych XIX wieku, a dopiero w latach dwudziestych i trzydziestych naszego stulecia powstała poprawna teoria wymiaru.

Zastanówmy się nad przyczynami tych trudności. W tym celu musimy najpierw wyjaśnić, co to jest *topologia*, bo przecież nie bez powodu mówimy tutaj o pojęciu wymiaru w topologii. Otóż topologia jest nauką o niezmiennikach homeomorfizmów. To brzmi jeszcze bardziej skomplikowanie niż samo słowo „topologia", ale dość łatwo jest wyjaśnić intuicyjny sens tych pojęć. Dowolny podzbiór n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n, a zatem w szczególności dowolny podzbiór trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej E^3 będziemy nazywali figurą. Otóż, *homeomorfizmem* lub *przekształceniem homeomorficznym* nazywamy (nieformalnie) każde takie przekształcenie jednej figury (przestrzeni topologicznej) na drugą,

odcinek — będący figurą spójną — nie jest homeomorficzny z niespójną figurą złożoną z dwóch rozłącznych odcinków. Możemy teraz sformułować podstawowe warunki, które powinna spełniać prawidłowa definicja wymiaru.

(1) Każda taka definicja powinna być zgodna z intuicją, a w szczególności wymiar n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n musi być równy n.
(2) Wymiar winien być określony dla dowolnej figury (przestrzeni topologicznej).
(3) Wymiar powinien być niezmiennikiem homeomorfizmów, tzn. dwie homeomorficzne figury powinny mieć ten sam wymiar.

Przyjrzyjmy się teraz, na trzech przykładach, trudnościom, które pojawiają się na drodze do sformułowania takiej definicji. Bodaj pierwszym narzucającym się sposobem zdefiniowania wymiaru jest uznanie za jednowymiarowe tych figur, które mają dodatnią długość, a nie mają powierzchni, za dwuwymiarowe tych figur, które mają powierzchnię, a nie mają objętości itd. Otóż taka definicja, nawet jeżeli pominąć znaczne trudności z właściwym określeniem pojęć długości, powierzchni i objętości (czym zajmuje się tzw. teoria miary), okazuje się przydatna tylko w bardzo specjalnych przypadkach. Nie spełnia ona bowiem żadnego z warunków (1)—(3). Dla ilustracji tej tezy wspomnijmy tylko, że stosunkowo łatwo można skonstruować na prostej dwie homeomorficzne figury, z których jedna ma długość dodatnią, a nawet nieskończoną, a druga zerową.

A oto inna, również narzucająca się, ,,definicja'' wymiaru. Przyjmijmy, że figura jest jednowymiarowa, gdy każdy jej punkt ma pewne ,,otoczenie'', które jest homeomorficzne z odcinkiem; dwuwymiarowa, gdy każdy jej punkt ma otoczenie homeomorficzne z kołem itd. Dla przykładu, okrąg jest jednowymiarowy, gdyż każdy jego punkt ma otoczenie, które po wyprostowaniu staje się odcinkiem. Podobnie, powierzchnia kuli (globusa) jest dwuwymiarowa, gdyż każdy jej punkt ma otoczenie, które po odpowiednim wygładzeniu (przeniesieniu na mapę) staje się kołem. Taka definicja spełnia warunki (1) i (3), ale nie spełnia warunku (2). Figury, których każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z odcinkiem (kołem, kulą etc.) nazywają się rozmaitościami.

(Rozmaitościami są wszystkie figury przedstawione na rys. 1.) Rozmaitości tworzą jednak wąską, choć ciekawą klasę przestrzeni (por. rys. 3).

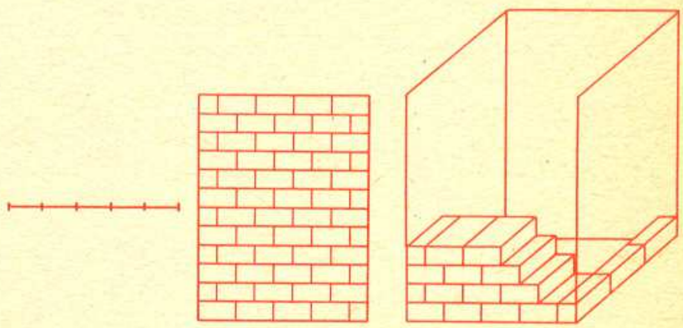
A oto jeszcze jedna nieudana, lecz pouczająca próba zdefiniowania wymiaru. Wydaje się intuicyjnie oczywiste, że figura leżąca na prostej euklidesowej jest jednowymiarowa tylko wtedy, gdy zawiera pewien odcinek. Pozostałe figury nazwiemy zerowymiarowymi (zerowymiarowy jest np. zbiór liczb wymiernych, a także każdy zbiór skończony). W ten sposób określiliśmy wymiar dla dowolnego podzbioru prostej. Podobnie postępujemy w przypadku podzbiorów płaszczyzny. Zgodnie z intuicją, figurę leżącą na płaszczyźnie nazwiemy dwuwymiarową tylko wtedy, gdy zawiera ona pewne koło. W przeciwnym razie rozpatrujemy dwa przypadki: jeżeli figura jest homeomorficzna z zerowymiarową figurą leżącą na prostej, to naturalnie również przypisujemy jej wymiar zero, a jeżeli tak nie jest, to uznajemy ją za jednowymiarową. Okazuje się, że taka definicja wymiaru figur leżących na płaszczyźnie jest absolutnie poprawna. Niestety, próba określenia w podobny sposób wymiaru podzbiorów trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej E^3 kończy się niepowodzeniem. Przyczyna tkwi w tym, że nie każda jednowymiarowa figura leżąca w E^3 jest homeomorficzna z pewną figurą leżącą na płaszczyźnie. Nie mamy zatem w tym przypadku metody pozwalającej na odróżnienie figur jedno- i dwuwymiarowych (zob. niżej oraz rys. 3).

Zanim przejdziemy do podania właściwej definicji wymiaru, zauważmy jeszcze, że z warunków (1) i (3) wynika, że jeżeli w ogóle istnieje prawidłowa definicja wymiaru, to przestrzenie euklidesowe E^n i E^m nie mogą być homeomorficzne dla różnych liczb n i m. Istotnie, wymiar pierwszej z nich musiałby być n, a drugiej m, podczas gdy figury homeomorficzne mają ten sam wymiar. Fakt niehomeomorficzności różnych przestrzeni euklidesowych, choć wydaje się intuicyjnie oczywisty, nie jest wcale prosty i udowodniony został dopiero w 1911 roku, na kilka lat przed powstaniem teorii wymiaru. Łatwo natomiast wykazać, że prosta euklidesowa E^1 nie jest homeomorficzna z płaszczyzną E^2. Wynika to stąd, że po wyjęciu dowolnego punktu z prostej przestaje ona być spójna, co nie zachodzi w wypadku płaszczyzny (zob. niżej).

Przejdziemy teraz do podania poprawnej definicji wymiaru. Najpierw jednak wyjaśnimy pojęcie domkniętego podzbioru danej figury. Zamiast podawania formalnej definicji powiemy tylko niezbyt ściśle, że podzbiór danej figury (przestrzeni topologicznej) jest *domknięty*, gdy zawiera wszystkie punkty tej figury leżące na jego brzegu. Na przykład, na płaszczyźnie kwadrat wraz z brzegiem (obwodem) jest domknięty. Po wyjęciu z niego któregokolwiek punktu leżącego na brzegu otrzymujemy już jednak zbiór niedomknięty. Zauważmy, że kwadrat — będący figurą dwuwymiarową — można tak pokryć dowolnie małymi zbiorami domkniętymi, by żaden punkt nie należał do więcej aniżeli trzech zbiorów (rys. 2b). Wydaje się również intuicyjnie oczywiste, że takiego pokrycia na ogół nie można poprawić w ten sposób, by żaden punkt nie należał do więcej aniżeli dwóch zbiorów.

Podobnie, sześcian — będący figurą trójwymiarową — można tak pokryć dowolnie małymi zbiorami domkniętymi, by każdy punkt należał do co najwyżej czterech zbiorów (rys. 2c). Nie można jednak ich liczby zmniejszyć do trzech.

Analogicznie, jednowymiarowy odcinek można pokryć dowolnie małymi zbiorami domkniętymi tak, by każdy punkt należał do co najwyżej dwóch zbiorów (rys. 2a). Nie możemy jednak żądać, by te zbiory były rozłączne.



Rys. 2. Pokrycia małymi zbiorami domkniętymi

Powyższe rozważania, które oczywiście wymagają ścisłego dowodu, prowadzą do następującej definicji wymiaru.

Definicja wymiaru. *Wymiarem* figury nazywamy taką najmniejszą liczbę naturalną n, że istnieje pokrycie tej figury dowolnie małymi zbiorami domkniętymi o tej własności, że każdy punkt należy do co najwyżej $n+1$ zbiorów.

Okazuje się, że tak określone pojęcie wymiaru spełnia wszystkie warunki (1)—(3), a zatem w szczególności prawdziwe jest następujące
Zasadnicze twierdzenie teorii wymiaru. Wymiar przestrzeni euklidesowej E^n jest równy n.

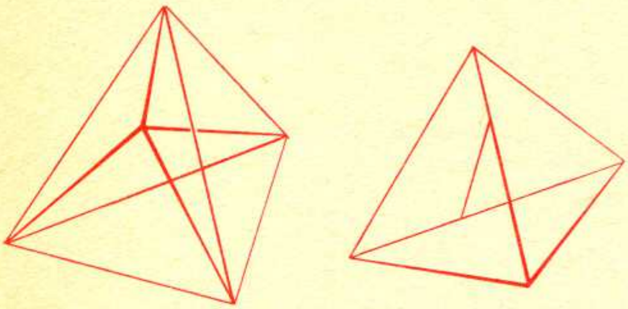
Prawdziwe są również następujące twierdzenia.

Twierdzenie o monotoniczności wymiaru. Jeżeli figura A jest zawarta w figurze B, to wymiar figury A nie przekracza wymiaru figury B.

Twierdzenie o sumie. Jeżeli figura A jest sumą dwóch domkniętych figur B i C, to wymiar figury A nie przekracza większego z wymiarów figur B i C.

Mówimy, że figura daje się zanurzyć w n-wymiarową przestrzeń euklidesową E^n, gdy jest ona homeomorficzna z pewną figurą leżącą w E^n. Nie każda figura jednowymiarowa daje się zanurzyć w prostą E^1 (na przykład okrąg). Istnieją także figury jednowymiarowe, które nie dają się zanurzyć w płaszczyznę E^2 (rys. 3). Okazuje się jednak, że każdą figurę jednowymiarową można zanurzyć w trójwymiarową przestrzeń euklidesową E^3. Wynika to z następującego ważnego i głębokiego twierdzenia.

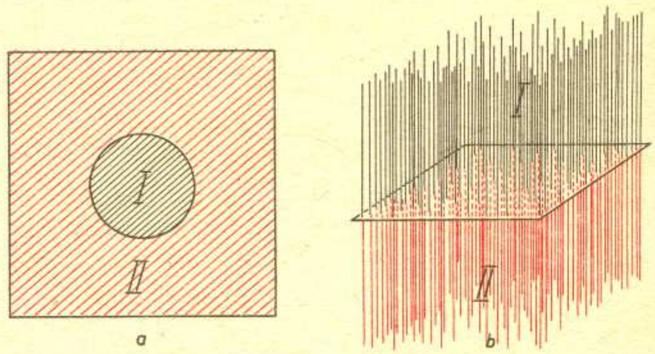
Twierdzenie o zanurzeniu. Każda figura n-wymiarowa daje się zanurzyć w $(2n+1)$-wymiarową przestrzeń euklidesową E^{2n+1}.



Rys. 3. Jednowymiarowe figury nie dające się zanurzyć w płaszczyźnie

Zauważmy, że zgodnie z definicją figura jest zerowymiarowa tylko wtedy, gdy ma ona pokrycie dowolnie małymi i rozłącznymi zbiorami domkniętymi. A zatem zerowymiarowa jest na przykład każda figura skończona, a także zbiór liczb wymiernych (lub niewymiernych) na prostej lub na płaszczyźnie. Powiemy, że domknięta figura leżąca w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n *rozcina* tę przestrzeń, gdy po jej usunięciu z przestrzeni E^n pozostała część przestaje być spójna, tzn. rozpada się na kilka kawałków. Na przykład okrąg i prosta rozcinają płaszczyznę E^2 (rys. 4a). Zauważmy, że są to figury jednowymiarowe. Okazuje się, że żadna figura zerowymiarowa nie rozcina płaszczyzny. Podobnie, powierzchnia kuli, a także dowolna płaszczyzna rozcina trójwymiarową przestrzeń euklidesową E^3 (rys. 4b). Żadna jednak figura jednowymiarowa nie ma tej własności. Fakty te wynikają z następującego twierdzenia.

Twierdzenie o rozcinaniu. Żadna figura domknięta wymiaru mniejszego niż $n-1$ nie rozcina E^n.

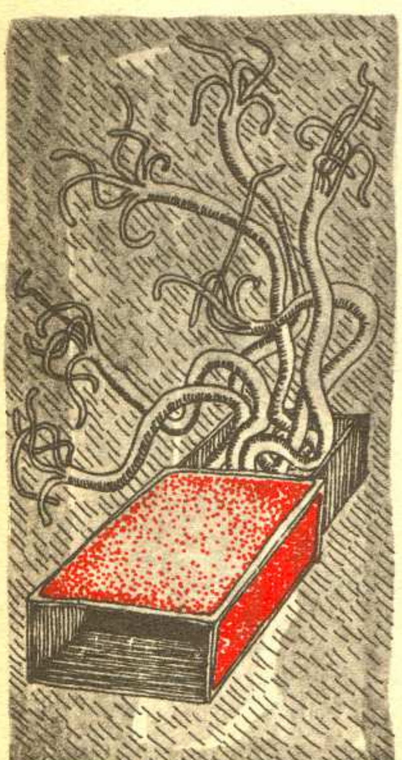


Rys. 4. Rozcinanie przestrzeni E^2 i E^3

Wymieniliśmy zaledwie kilka twierdzeń składających się na piękną i bogatą teorię wymiaru. Wszystkich zainteresowanych tą teorią odsyłamy do interesującej i przystępnie napisanej książeczki R. Dudy pt. „O pojęciu wymiaru'' (Biblioteczka Matematyczna 31, PZWS, Warszawa 1972).

Ruchy Browna (II)

Dr Bogdan CICHOCKI



W poprzednim numerze „Delty'' opisaliśmy zmagania fizyków XIX wieku z problemem tzw. ruchów Browna. Przypomnijmy podstawowe fakty. W roku 1827 Robert Brown odkrył zygzakowate ruchy wykonywane przez drobne ziarenka zawieszone w cieczy. Ruchy te obserwowano dla wszystkich substancji, o ile zostały one tak rozdrobnione, że ziarenka miały średnicę co najwyżej kilku mikronów. Próby wyjaśnienia przyczyn ruchów Browna napotkały poważne trudności. Wszystkie hipotezy sprowadzające owe przyczyny do działania czynników zewnętrznych po konfrontacji z doświadczeniem musiały zostać odrzucone. Wyjaśnienie zagadki na gruncie teorii kinetyczno-molekularnej również wydawało się niezadowalające. Jeżeli bowiem przyjmiemy, że ruchy Browna są wynikiem zderzeń molekuł cieczy z zawieszonymi w niej ziarenkami, to: po pierwsze, proste oszacowanie wykazuje, że prędkość, jaką uzyska ziarenko na skutek jednego zderzenia z molekułą cieczy, ma niezwykle małą wartość; po drugie, jak sugerowali przeciwnicy hipotezy atomowej, ziarenka są bombardowane równomiernie ze wszystkich stron i w rezultacie nie powinny w ogóle się poruszać. Co więcej, jeżeli wyliczymy średnią prędkość ziarenek na podstawie zasady ekwipartycji energii, to uzyskamy wartość ok. 10 tys. razy większą niż obserwowana w eksperymentach. Tak wyglądała sytuacja na przełomie XIX i XX wieku. Wiek XX przyniósł jednak rozwiązanie zagadki. A oto, jak do tego doszło.

Pierwszym ważnym momentem było skonstruowanie przez Siedentopfa i Zsigmondy'ego w roku 1903 tzw. ultramikroskopu. Zasada działania tego przyrządu była bardzo prosta. Od 1868 roku znano zjawisko Tyndalla polegające na rozpraszaniu światła przez ośrodki mętne — ośrodki, które są właśnie omawianymi przez nas zawiesinami drobnych cząsteczek w cieczach i gazach. Wiązka światła