Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Skrót regulaminu ligi zadaniowej

Uwaga. Zgodnie z zapowiedzią (patrz Regulamin, „Delta" 9/1981), w numerach 6 i 7 zadania ligowe nie ukazują się (przerwa wakacyjna). W numerze 6 zamieszczone będą rozwiązania zadań z numerów 2 i 3 (tj. zadań 47—51), a w numerze 7 w ogóle nie będzie rubryki „Klub 44". Następne zadania ligowe ukażą się w numerze 8.

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Klub 44

Redaguje dr Marcin E.KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 10/1982

Jacek Uryga	- Bytom	48,82pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	40,29pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	39,06pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	36,52pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	29,55pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	28,92pkt
Krzysztof Trautman	- Warszawa	22,09pkt

Współczynniki trudności zadań 34, 35, 36:
2,57 2,87 1,33

Witamy w Klubie 44 pana Jacka Urygę z Bytomia, który z nadwyżką 4,82 przekroczył barierę 44 punktów w siódmej kolejce swoich startów.
Gratulujemy !

Zadania nr 55, 56, 57

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1983

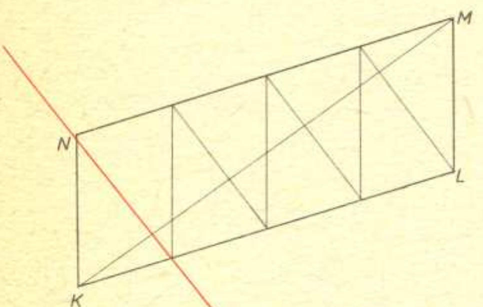
55. Dane są liczby dodatnie a, b, c. Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $a^x+b^x = c^x$?

56. Wykazać prawdziwość lub nieprawdziwość następujących stwierdzeń:
a) Jeżeli zbiór wierzchołków wielokąta ma oś symetrii, to wielokąt ma oś symetrii.
b) Jeżeli zbiór wierzchołków wielokąta ma środek symetrii, to wielokąt ma środek symetrii.
Gdy któreś z nich okaże się fałszywe, zaproponować takie wzmocnienie założeń, by uzyskać twierdzenie prawdziwe.

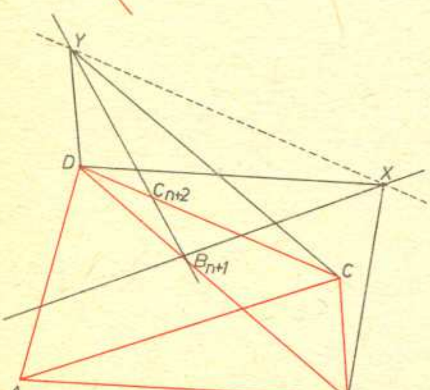
57. Dla danej liczby naturalnej obliczamy iloczyn jej cyfr, to samo robimy z otrzymaną liczbą i kontynuujemy to postępowanie tak długo, aż dojdziemy do liczby jednocyfrowej. Wyznaczyć wszystkie liczby, dla których w wyniku opisanej procedury dostajemy cyfrę 1.

Zadanie 56 przysłał nasz Czytelnik, pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Rozwiązania zadań z numeru 1/1983



Rys. 1



Rys. 2

43. Lemat. Jeśli prosta przechodząca przez wierzchołek N równoległoboku $KLMN$ dzieli bok $\overline{KL}$ w stosunku $1:k$ (k naturalne), to ta sama prosta dzieli przekątną $\overline{KM}$ w stosunku $1:(k+1)$.
Dowód lematu łatwo odczytać z rysunku 1.
Przystępujemy do właściwego rozwiązania. Uzupełniamy trójkąty DAB i DBC do równoległoboków $DABX$ i $DBCY$ (rys. 2). Ustalmy n. Na mocy lematu prosta XA_n przecina odcinek $\overline{DB}$ w punkcie B_{n+1}, a prosta YB_{n+1} przecina odcinek $\overline{DC}$ w punkcie C_{n+2}. Ze współliniowości trójek punktów A_n, B_{n+1}, X oraz B_{n+1}, C_{n+2}, Y wynika, że $X\in P_n$, $Y\in P_n$. Zatem prosta XY leży w płaszczyźnie P_n (dla dowolnego n).

44. Podnieśmy równanie $\sqrt{y} = \sqrt{500}-\sqrt{x}$ stronami do kwadratu: $y = 500+x-\sqrt{2^4 5^3 x}$. Wyrażenie podpierwiastkowe musi być pełnym kwadratem, więc $x = 5k^2$, skąd $y = 500+5k^2-\sqrt{2^4 5^4 k^2} = 5(10-k)^2$. Podstawiając za k wartości całkowite od 0 do 10 dostajemy wszystkie rozwiązania danego w zadaniu równania.

45. Z założeń wynika, że każdy z punktów x_i ($i = 1, ..., n$) jest punktem stałym funkcji $f(x) = \cos(\cos(... (\cos x) ...))$ (złożenie n-krotne). Różniczkując tę funkcję otrzymujemy iloczyn $n-1$ czynników postaci $(-\sin(\cos(...)))$ i jeszcze czynnik $(-\sin x)$. Wszystkie czynniki, z wyjątkiem tego ostatniego, są co do modułu niewiększe od sin 1, więc $|f'(x)| < 1$ dla wszystkich $x\in\mathbf{R}$ (jeśli tylko $n\geqslant 2$). Punkty stałe funkcji f to miejsca zerowe funkcji $h(x) = x-f(x)$. Ale $h'(x) = 1-f'(x) > 0$, więc funkcja h może mieć tylko jedno miejsce zerowe. Zatem $x_1 = ... = x_n$.