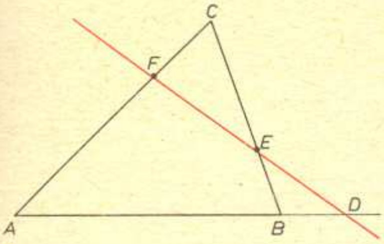
Automat do dowodzenia twierdzeń

Dr Michał SZUREK

W szkolnych programach geometrii — nawet w klasach z rozszerzonym programem matematyki — nie znalazło się miejsca dla twierdzenia Cevy. Autor artykułu pragnie wykazać, że niezasłużenie. Proste do zapamiętania, przyjemne w dowodzie i obfite w ciekawe konsekwencje — czyż może być lepsze twierdzenie?



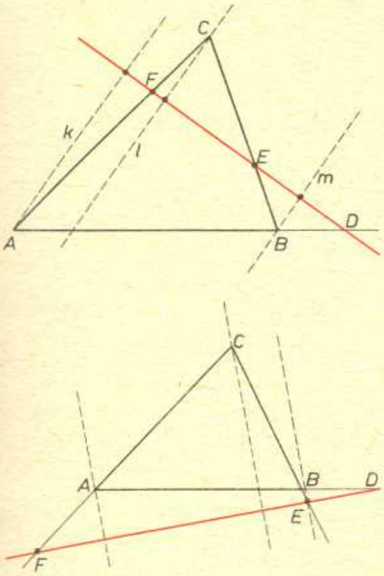
Rys. 1. Twierdzenie Menelausa

Twierdzenie Cevy najlepiej łączyć z **twierdzeniem Menelausa**:

Jeżeli prosta p przecina boki trójkąta lub ich przedłużenia (nie przechodząc przez żaden z wierzchołków ani nie będąc równoległą do żadnego z boków), to w oznaczeniach jak na rys. 1 mamy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = -1.$$

Prościej (i bez wektorów): każdy z mnożonych ułamków to stosunek długości odpowiednich odcinków wzięty ze znakiem plus, gdy punkt podziału leży wewnątrz boku, a minus, gdy leży na zewnątrz.



Rys. 2a, b. Dowód twierdzenia Menelausa: zastosuj twierdzenie Talesa do kąta D i widocznych na rysunku prostych równoległych np. $\frac{CF}{FA} = \frac{l}{k}$.

Banalny dowód twierdzenia Menelausa widzimy na rys. 2a i 2b.

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne:

Jeśli punkty D, E, F leżące na prostych zawierających (odpowiednio) boki AB, BC, CA trójkąta ABC spełniają równość

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = -1,$$

— to leżą one na jednej prostej.

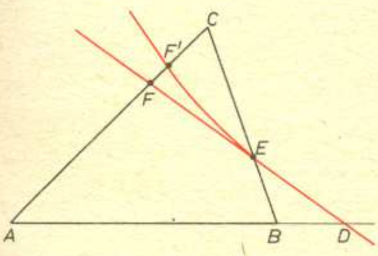
Dowód. Gdyby bowiem prosta DE przecinała AC w punkcie F' (rys. 3) różnym od F, to w myśl twierdzenia Menelausa byłoby

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CF'}}{\overrightarrow{F'A}} = -1,$$

co wraz z założoną równością dałoby

$$\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = \frac{\overrightarrow{CF'}}{\overrightarrow{F'A}}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{CF'}} = \frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{F'A}},$$

a to jest niemożliwe, gdyż jeden z tych ułamków jest większy, drugi zaś mniejszy od jedności.

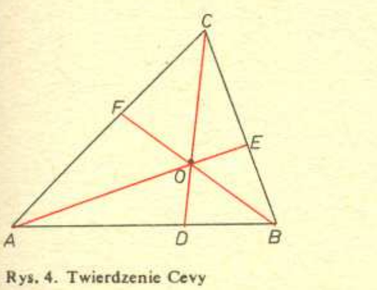


Rys. 3

A teraz tytułowe:

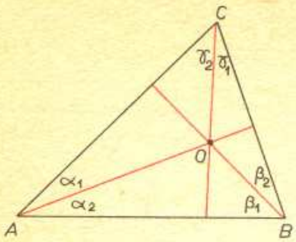
Twierdzenie Cevy: Przy dowolnym wyborze punktu O wewnątrz lub na zewnątrz trójkąta (jak na rysunku 4) mamy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = 1.$$



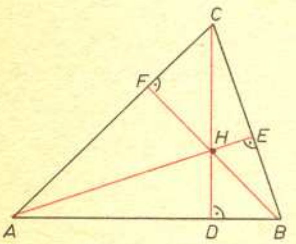
Rys. 4. Twierdzenie Cevy

Dowód twierdzenia Cevy można zamknąć krótkim: zastosuj dwukrotnie twierdzenie Menelausa — najpierw do trójkąta ACD przeciętego przez BF, później do trójkąta BCD i tej samej prostej BF. Otrzymane dwie równości pomnóż stronami.

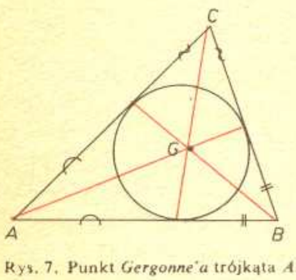


Rys. 5. Trygonometryczna postać twierdzenia Cevy:

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1.$$



Rys. 6. Trójkąty ABF i ACD są podobne, więc $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD}$. Trójkąty ABE i DBC są podobne, więc $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{DB}$. Trójkąty BFC i AEC są podobne, więc $\frac{BC}{AC} = \frac{FC}{EC}$. Z tych trzech proporcji wynika, że $AF \cdot BD \cdot EC = AD \cdot BE \cdot FC$, a więc wysokości trójkąta przechodzą przez jeden punkt!



Rys. 7. Punkt *Gergonne'a* trójkąta ABC

Otrzymujemy też (po identycznym jak dla odwrotnego twierdzenia Menelausa rozumowaniu)

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy: Jeśli punkty D, E, F leżące na prostych zawierających odpowiednio boki AB, BC, CA trójkąta ABC spełniają równość

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = 1,$$

to proste AE, BF i CD przecinają się w jednym punkcie.

Odnotujmy jeszcze trygonometryczną postać twierdzenia Cevy i twierdzenia doń odwrotnego: w oznaczeniach jak na rysunku 5 proste AE, CD i BF są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1.$$

Wynika ona z wersji „geometrycznej" np. przez zastosowanie twierdzenia sinusów. I oto koniec pracy. Teraz zbieramy owoce.

Twierdzenie 1. Trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód — natychmiast wynika ze znanego twierdzenia o stosunku podziału boku przez dwusieczną i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy!

Twierdzenie 2. Trzy środkowe boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód — błyskawiczny.

Twierdzenie 3. Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód — szybki; znów stosujemy twierdzenie odwrotne do Cevy (rys. 6).

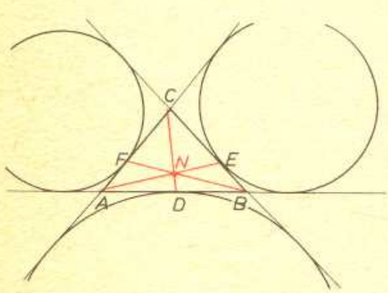
Twierdzenie 4. Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego przecinają się w jednym punkcie (jest to tzw. punkt *Gergonne'a*).

Dowód — bagatelka (patrz rys. 7).

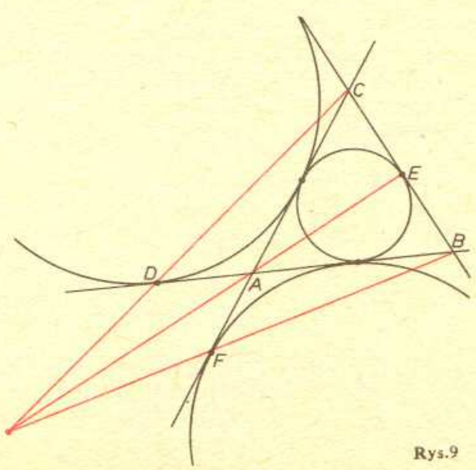
Twierdzenie 5. Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych (rys. 8) przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem *Nagela*).

Dowód — już jest.

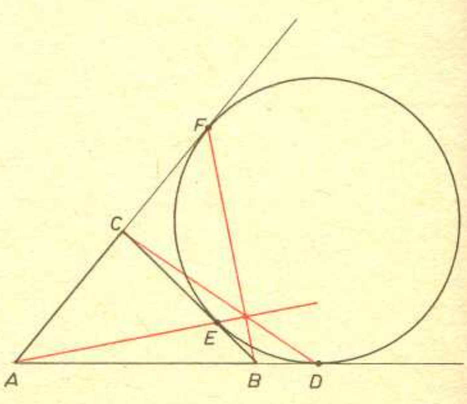
Twierdzenie 5a. Podobnie, tylko trochę inaczej (rys. 9).
Twierdzenie 5b. I jeszcze trochę inaczej (rys. 10).



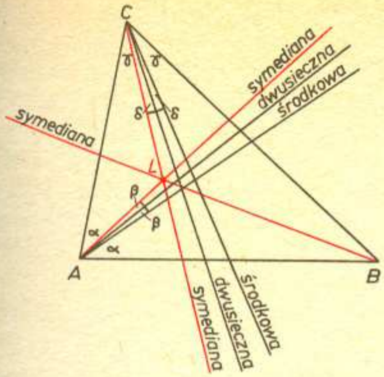
Rys. 8. Ponieważ $AF = BE$, $AD = CE$ i $FC = DB$, więc proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych przecinają się w jednym punkcie N.



Rys.9



Rys. 10



Rys. 11. Z równości zaznaczonych kątów i trygonometrycznej postaci twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy wynika, że trzy symediany trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

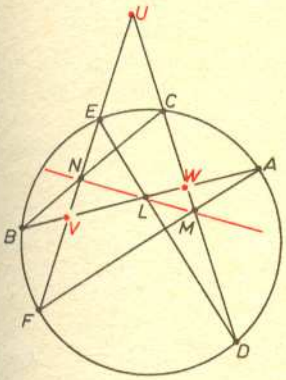
Twierdzenie 6. Nazwijmy *symedianą* (symetryczną medianą, mediana = = środkowa) odbicie symetryczne środkowej w dwusiecznej wychodzącej z tego samego wierzchołka trójkąta. Wówczas:
Trzy symediany trójkąta przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem *Lémoine'a* lub punktem *Grebesche'a*).

Dowód. Samo wychodzi z twierdzenia odwrotnego do Cevy w wersji trygonometrycznej (rys. 11).

I o tak ślicznym twierdzeniu nie wspomina się teraz w szkole! Słowo „teraz" zostało użyte rozmyślnie: prawie połowę artykułu „ściągnęliśmy" ze znanego w latach dwudziestych i trzydziestych podręcznika Jana Zydlera.

A teraz nieco trudniejsze zadanie: udowodnić następujące **twierdzenie Pascala**:

Jeśli przeciwległe boki sześciokąta $ABCDEF$ wpisanego w okrąg przecinają się w punktach L, M, N, to punkty te leżą na jednej prostej.



Rys. 12

Dowód. Oznaczmy przez U punkt przecięcia prostych EF i CD, przez V — punkt przecięcia AB i EF, przez W punkt przecięcia AB i CD. Stosując twierdzenie Menelausa do trójkąta UVW i, kolejno, prostych ED, AF, BC, a potem mnożąc otrzymane równości otrzymujemy, że dziewięć ułamków daje w iloczynie (-1). Ponieważ jednak

$$(*)\qquad \begin{aligned} \overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{VB} &= \overrightarrow{VE}\cdot\overrightarrow{VF} \\ \overrightarrow{WA}\cdot\overrightarrow{WB} &= \overrightarrow{WC}\cdot\overrightarrow{WD} \\ \overrightarrow{UE}\cdot\overrightarrow{UF} &= \overrightarrow{UC}\cdot\overrightarrow{UD}, \end{aligned}$$

więc $\dfrac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = -1$. Punkty L, M, N w myśl odwrotnego twierdzenia Menelausa leżą na prostej.

Sądzimy, że Czytelnik potrafi przeprowadzić dowód w przypadku, gdy rysunek wygląda inaczej niż rys. 12 i wie, skąd wzięły się równości (*).

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 331. Uogólnić znany wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na przypadek sumy n zbiorów. (Symbol $|X|$ oznacza liczbę elementów skończonego zbioru X).
Rozwiązanie na str. 13

M 332. Niech $\varphi(n)$ będzie liczbą mniejszych od n liczb naturalnych względnie pierwszych z $n (n > 1)$. Niech $p_1, \ldots, p_m$ będą czynnikami pierwszymi n. Wykazać, że

$$\varphi(n) = n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

Rozwiązanie na str. 11

M 333. Udowodnić, że jeżeli $\sigma(n)$ jest sumą wszystkich naturalnych dzielników liczby n $(n > 1)$, to $\varphi(n)\sigma(n) < n^2$. Wykazać, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje n takie, że $\varphi(n)\sigma(n) > n^2(1-\varepsilon)$.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 136. Na poziomej powierzchni z tarciem (współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego są równe i wynoszą f) spoczywa klocek (masa m) przytwierdzony do sprężyny o stałej sprężystości k. Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony, a ona sama zajmuje położenie poziome i nie jest napięta. O ile należy przesunąć klocek wzdłuż osi sprężyny, aby po puszczeniu powrócił do pierwotnego położenia? Opór powietrza oraz tarcie wewnętrzne sprężyny możemy pominąć.
Rozwiązanie na str. 15