Wszystko o równaniach algebraicznych

Dr Maciej BRYŃSKI

Przez długie stulecia algebra była nauką o rozwiązywaniu równań i przez długie stulecia postępy tej wiedzy nie były specjalnie imponujące. Równania liniowe, pewne równania kwadratowe, a także szczególnie proste równania wyższych stopni rozwiązywali już starożytni Grecy. Dla nich jednak równanie miało sens jedynie wtedy, gdy wiązało pewne wielkości geometryczne, dlatego też rozwiązywanie równania polegało na ogół na podaniu opisu odpowiedniej konstrukcji geometrycznej. W Średniowieczu wiedza o rozwiązywaniu równań niewiele się posunęła, właściwie matematycy do wieku XV potrafili radzić sobie jako tako z równaniami liniowymi i kwadratowymi, choć nie znali wzorów na pierwiastki, których my teraz uczymy się w szkole, dopiero bowiem F. Viete wpadł w XVI w. na prosty, ale doskonały pomysł oznaczenia wielkości liczbowych literami. (Spróbujmy wyrazić słownie, bez użycia wzorów, sposób rozwiązywania równania kwadratowego!) Istotny krok naprzód uczynili matematycy włoscy w XVI w. podając wzory na pierwiastki równań stopnia trzeciego i czwartego. I co dalej? Naturalne wydawało się poszukiwanie wzorów na pierwiastki równania stopnia piątego, a w dalszej perspektywie stopnia szóstego, siódmego i tak dalej. Wielu matematyków podjęło ten trud nie zważając na niepowodzenia. Ponieważ wzory Cardano (na pierwiastki równania stopnia trzeciego) oraz wzory Ferrariego (dla równania stopnia czwartego) są dość skomplikowane, więc spodziewano się, że dla równań wyższych stopni wzory na pierwiastki mogą być jeszcze bardziej zawiłe. W każdym razie poszukujący sposobów rozwiązywania równań algebraicznych pracujący w XVII i XVIII wieku widzieli przed sobą nieprzebrany ogrom pracy. Sprawa wyjaśniła się w sposób nieoczekiwany w wieku XIX. Okazało się mianowicie, że równań stopnia piątego i stopni wyższych nie można na ogół „wcale" rozwiązać. Wyjaśnijmy tę sprawę nieco dokładniej.
Jak wiadomo, pierwiastkami równania kwadratowego

$$ax^2+bx+c=0$$

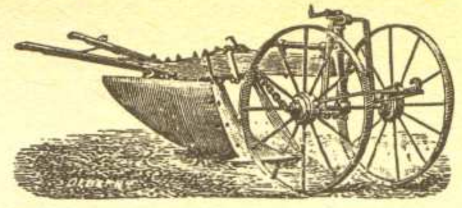
są liczby $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,
a więc liczby wyrażające się przez współczynniki danego równania za pomocą działań arytmetycznych i operacji pierwiastkowania. O to właśnie chodzi przy rozwiązywaniu równań.

Mówimy, że równanie algebraiczne

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

jest *rozwiązalne przez pierwiastniki*, jeżeli pierwiastki tego równania można wyrazić w zależności od współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_n$ za pomocą działań dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz wyciągania pierwiastków (dowolnego stopnia).

Chcemy mieć więc takie wzory na pierwiastki równania, w których współczynniki równania występują jako parametry odpowiednio połączone znakami działań arytmetycznych i znakami pierwiastkowania. Podstawiając w miejsce tych parametrów konkretne wartości liczbowe współczynników danego równania otrzymać chcemy konkretne wartości pierwiastków tego równania.



W roku 1803 ukazała się praca P. Ruffiniego zawierająca twierdzenie głoszące, że równanie stopnia piątego nie jest rozwiązalne przez pierwiastniki. Dowód Ruffiniego nie był niestety poprawny. Dwadzieścia lat później Norweg Niels Henrik Abel udowodnił to twierdzenie stawiając w ten sposób kropkę nad i, wyjaśniając definitywnie kwestię istnienia ogólnych wzorów na pierwiastki równań algebraicznych: wzory takie nie istnieją dla równań stopni wyższych od 4.

W ten sposób problem poszukiwania wzorów na pierwiastki został zakończony. Odkrycie to było zaskakujące i niespodziewane, gdyż po raz pierwszy chyba udowodniono, że nie można wykonać pewnej konkretnej operacji, że do niektórych liczb nie można „dojść" wykonując najbardziej naturalne działania.

Z tego, że nie istnieją wzory na pierwiastki dowolnego równania, powiedzmy stopnia piątego, nie wynika jednak, że nie można wyznaczyć pierwiastków żadnego równania stopnia piątego. Bardzo przecież łatwo o przykłady równań wyższych stopni, których pierwiastki potrafimy wyznaczyć. Możemy przecież natychmiast wskazać pierwiastki równań

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=0,$$
$$x^6-8=0.$$

Pierwiastki te są w pierwszym przypadku liczbami wymiernymi (a nawet naturalnymi), w drugim wyrażają się przez liczby wymierne za pomocą działań arytmetycznych i operacji pierwiastkowania. Czy dla każdego równania jest podobnie? Musimy pytanie to sprecyzować dokładniej, do tego potrzebna będzie następująca definicja.

Ciałem liczbowym nazywamy taki zbiór liczb K zawierający liczby 0 i 1, w którym spełnione są warunki:
jeśli $a \in K$, $b \in K$, $b \neq 0$, to $a+b \in K$, $a-b \in K$, $ab \in K$, $\dfrac{a}{b} \in K$.

Niech więc

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

będzie równaniem o współczynnikach z ciała liczbowego K. Czy pierwiastki danego równania można wyrazić używając elementów ciała K, działań arytmetycznych i operacji pierwiastkowania? Odpowiedź na to pytanie podał w pierwszej połowie XIX w. genialny matematyk francuski Ewaryst Galois. Teoria Galois wiąże z każdym równaniem algebraicznym o współczynnikach w ciele liczbowym K pewną grupę, zwaną grupą Galois. Odpowiednie własności algebraiczne grupy Galois decydują o tym, czy wszystkie pierwiastki rozważanego równania wyrażają się przez elementy ciała K za pomocą działań algebraicznych i operacji pierwiastkowania. Można wykazać, że np. pierwiastki równania

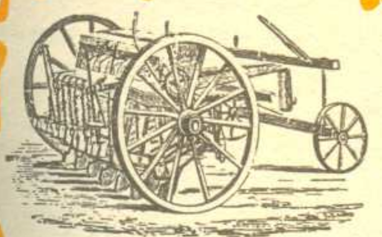
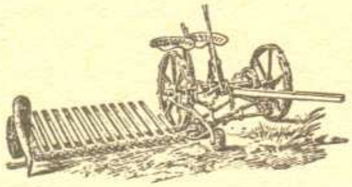
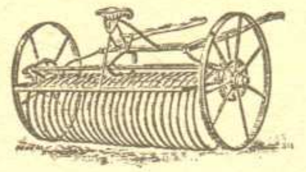
$$x^5-4x-2=0$$

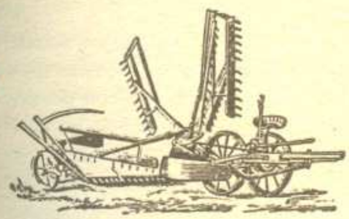
nie wyrażają się w ten sposób, choć oczywiście równanie to *ma* pierwiastek rzeczywisty.

Teoria równań algebraicznych doczekała się więc w pierwszej połowie ubiegłego stulecia definitywnego wyjaśnienia. Twierdzenie Abela-Ruffiniego orzekło, że nie ma wzorów na pierwiastki równań wyższych stopni, z teorii Galois wynika odpowiedź na pytanie, czy pierwiastki konkretnego równania wyrażają się we względnie przyzwoity sposób, czy też są to liczby, których właściwie „nie można" zapisać.

Nie sposób nie zwrócić uwagi na to, że z teorii Galois wynika jednoznaczna i ostateczna odpowiedź na pytanie o wykonalność konstrukcji geometrycznych. Punkt (x, y) można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy wychodząc z wielkości danych można współrzędne x oraz y otrzymać w wyniku rozwiązywania równań kwadratowych (zob. *Konstrukcje geometryczne*, Biblioteczka Delty, t. 1).

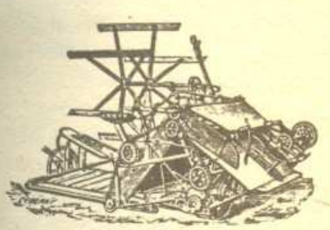
Wyniki Galois i Abela rozstrzygnęły więc ostatecznie kluczowe zagadnienia algebry i geometrii, ich znaczenie nie ogranicza się jednak tylko do zamknięcia tych żywych i rozwijanych od wieków problemów. Prace tych matematyków stały się podwaliną do rozwoju nowoczesnej algebry, zwłaszcza teorii grup i teorii ciał, a także innych działów matematyki.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

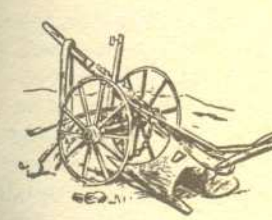


M 328. Wykazać, że w każdym trójkącie nierównoramiennym następujących 11 punktów leży na jednym okręgu: ortocentrum H (punkt przecięcia wysokości), środek O okręgu opisanego, trzy rzuty punktu O na wysokości trójkąta, trzy rzuty ortocentrum H na symetralne oraz trzy rzuty ortocentrum H na proste łączące O z wierzchołkami trójkąta.
Rozwiązanie na str. 7

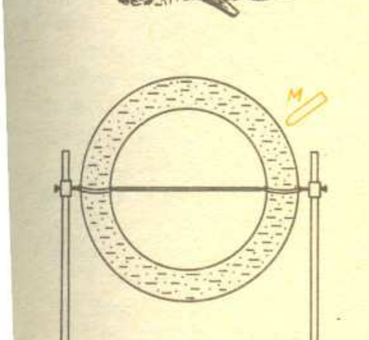
M 329. Wykazać, że jeżeli trzy ściany czworościanu są wzajemnie prostopadłe, to kwadrat pola czwartej ściany jest równy sumie kwadratów pól tych trzech ścian.
Rozwiązanie na str. 16

M 330. Przez każdy wierzchołek trójkąta prowadzimy proste połowiące obwód tego trójkąta. Udowodnić, że proste te przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ



F 133. J. Tyndall (1820—1893) w książce „Ciepło jako rodzaj ruchu" opisuje następujące zjawisko. Południowy stok dachu katedry w Bristolu pokryto arkuszami blachy ołowianej utrzymującej się na krokwiach dzięki znacznemu tarciu. Od samego początku zaobserwowano, iż pokrycie powoli, lecz w sposób ciągły, ześlizguje się. Po dwóch latach przesunięcie wynosiło już 18 cali. Przybicie arkuszy do krokwi okazało się nieskuteczne — gwoździe były wyrywane. Wyjawić przyczynę opisanego zjawiska.
Rozwiązanie na str. 11



F 134. Podczas wykładów A. H. Popow (1859—1906) często demonstrował następujący efekt. Zaciski dwóch identycznych galwanometrów łączone były przewodnikami kilkunastometrowej długości. Gdy jeden z galwanometrów przechylano, wskazówka drugiego wychylała się. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 11

F 135. A. Compton (1892—1962) wymyślił przyrząd pozwalający wykrywać istnienie dobowego ruchu Ziemi. Urządzenie składa się z toroidalnej szklanej rury wypełnionej cieczą z drobną zawiesiną, która może być obserwowana przez mikroskop M (patrz rysunek). Gdy rura zostaje obrócona o 180° wokół poziomej osi, ciecz zaczyna krążyć wzdłuż rury. Występowanie cyrkulacji cieczy świadczy o istnieniu dobowego ruchu Ziemi. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 5