Twierdzenie Cauchy'ego—Kowalewskiej

„Dajcie mi położenia i prędkości wszystkich punktów materialnych, a przepowiem przyszłość świata" — te słowa Pierre Simona de Laplace'a (1749—1827) dobrze oddają istotę determinizmu i dają mu matematyczną podbudowę. Skoro ruch cząstek materialnych opisywany jest równaniami różniczkowymi, które przy rozsądnych założeniach mają jednoznaczne rozwiązania (zależne tylko od warunków początkowych, np. od stanu w chwili czasowej t_0), to istotnie przewidzenie przyszłości świata jest teoretycznie wykonalne, choć może być bardzo kłopotliwe rachunkowo. W każdym razie (to ważna konsekwencja filozoficzna!) nie mamy wpływu na przyszłość, bo *każdy ruch da się opisać równaniem różniczkowym, a skoro ma ono jednoznaczne rozwiązanie*...
Dopiero co napisane zdanie może być przyjęte równie dobrze jako podstawa pesymistycznych, jak i optymistycznych zapatrywań na życie. Pesymista (a także np. leń) powie: skoro i tak nie mamy wpływu na to, co się stanie, to po co pracować, męczyć się — skoro to i tak wszystko jedno. Optymista powie wprost przeciwnie: nie ma rzeczy nieprzewidzianych, a więc rób swoje, a osiągniesz co chcesz. Chyba że jest to przeciwne boskim zamierzeniom względem twojej osoby, ale z Bogiem jeszcze nikt nie wygrał.
Ten krótki artykuł może być odczytany jako mini rozprawka filozoficzna, choć formalnie chce opowiedzieć o ważnym osiągnięciu matematyki XIX wieku: rozwiązaniach zagadnienia Cauchy'ego, a konkretnie o bodaj najbardziej klasycznym twierdzeniu Cauchy'ego — Kowalewskiej dotyczącym rozwiązań liniowych równań różniczkowych cząstkowych.

Sofia W. Kowalewska (1850—91), uczona rosyjska, uczennica Weierstrassa, była od 1884 r. profesorem uniwersytetu w Sztokholmie, a od 1889 członkiem Petersburskiej Akademii Nauk. Oprócz twórczości naukowej (z dziedziny równań różniczkowych, funkcji analitycznych, mechaniki teoretycznej i astronomii) zajmowała się działalnością publicystyczną i literacką, pisując nawet powieści. Omawiane w artykule twierdzenie, łączone z nazwiskiem jej i Augustyna Cauchy'ego (1789—1857) pochodzi z 1883 roku.

Teoria liniowych równań cząstkowych wyrosła wprost z intensywnych badań kilku specjalnych takich równań, których ważność doceniono już w wieku XVIII. Były to równania opisujące tak podstawowe zjawiska fizyczne jak grawitacja, elektromagnetyzm, rozchodzenie się dźwięku, przewodnictwo cieplne (a później zjawiska kwantowe). Później okazało się, że równania te mają znaczenie i w czystej matematyce: równanie Laplace'a $\Delta u = f$, gdzie Δ jest operatorem $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$ — w geometrii i topologii rozmaitości riemannowskich, operator „ciepłoprzewodnictwa" $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ występuje w probabilistyce,

Dla funkcji $f(a_1, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_l)$ operator Δ_x to $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)^2$.

a bardzo podobny formalnie operator Schrödingera — $i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ w mechanice kwantowej.

Ogólnie rzecz biorąc, problem Cauchy'ego to zagadnienie: *rozwiązać dane równanie różniczkowe przy danych warunkach początkowych.*
Dla równań zwyczajnych

$$\text{(1)} \qquad \frac{du}{dt} - a(t)\cdot u = f(t), \text{ przy czym ma być } u(0) = u_0,$$

rozwiązanie problemu jest proste: jeżeli w przedziale „czasowym" $-T < t < T$ funkcje $a(t)$ i $f(t)$ są ciągłe, zaś u_0 jest dowolną stałą („warunki początkowe"), to rozwiązanie równania (1) istnieje dla $t \in (-T, T)$, jest jedyne i wyraża się np. wzorem

$$\text{(2)} \qquad u(t) = e^{A(t,0)}u_0 + \int_0^t e^{A(t,s)}f(s)ds,$$

$$\text{gdzie } A(t, s) = \int_s^t a(s)ds.$$

Dla równań cząstkowych komplikuje się zarówno dokładne sprecyzowanie problemu, jak i kryteria istnienia i jednoznaczność rozwiązania. I właśnie wśród różnych twierdzeń o problemie Cauchy'ego prostotą, umiarkowaniem założeń i ogólnością wyróżnia się właśnie *twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej.*
Chodzi w nim z grubsza rzecz biorąc o to, że problem Cauchy'ego ma jednoznaczne rozwiązanie, jeżeli bierzemy analityczne współczynniki i szukamy analitycznych rozwiązań. Spośród różnych wersji twierdzenia przytoczymy najbardziej klasyczną.

Funkcja analityczna to funkcja rozwijalna na szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

na całej prostej $-\infty < x < \infty$ (jeśli mowa o funkcjach rzeczywistych) lub na całej płaszczyźnie zespolonej C.

Niech będą dane

1) $n+1$ funkcji $A_j(z, t) = A_j(z_1, z_2, \ldots, z_m, t)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ciągłych względem „czasu" t, $|t| < T$ i analitycznych względem $z_1, \ldots, z_m$ w pewnym obszarze O_1 wokół początku układu współrzędnych,
2) funkcja $f(z, t)$ ciągła i analityczna jak wyżej,
3) funkcja $u_0(z)$ anlityczna jak wyżej. Rozpatrzmy problem Cauchy'ego o funkcji szukanej u

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A_j(z, t)\frac{\partial u}{\partial z_j} + A_0(z, t)\cdot u + f(z, t)$$

z warunkami początkowymi

$$\text{(4)} \qquad u|_{t=0} = u_0(z), \text{ tzn. } u(z, 0) = u_0(z).$$

Na przykład

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4z_1 z_2 t\frac{\partial u}{\partial z_1} + \sin z_1 \cdot e^{z_2}\sqrt{t}\,\frac{\partial u}{\partial z_2} + (z_1 + z_2^{13})u + (z_1^{12} + z_2^{198}),$$

przy czym ma być $u(z_1, z_2, 0) = 5z_1 - 3z_2^8$.
Wówczas — powiada twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej — jeżeli O_0 jest obszarem, którego domknięcie jest zawarte w O_1, to istnieje w nim jednoznaczne rozwiązanie problemu (3)–(4), tyle że być może w mniejszym przedziale czasowym $|t| < t_0 < T$.

Bardziej ogólna wersja twierdzenia dotyczy problemu Cauchy'ego na hiperpowierzchniach, tzn. zbiorach opisywanych jednym równaniem $\varphi(x) = 0$, istnieje oczywiście wiele innych wersji i uogólnień.

Dowody twierdzenia Cauchy'ego-Kowalewskiej nie są łatwe, choć warto zauważyć, że główna trudność polega zwykle na wykazaniu zbieżności szeregu, który opisuje funkcję będącą rozwiązaniem, a który z kolei wypisać nietrudno. Oczywiście współczesne dowody różnią się znacznie od oryginalnego dowodu Kowalewskiej.

Czy jednak z twierdzenia Cauchy'ego-Kowalewskiej wynikają jakieś wnioski „filozoficzne" dotyczące przyszłości świata? Mimo wszystko raczej nie, choć niektórzy mniej wykształceni matematycznie filozofowie skłonni by byli wyciągać z niego tezę o zdeterminowaniu przyszłości przez teraźniejszość. Ale dziś takie poglądy nie są modne, a ich matematyczne podstawy bardzo kruche. Po pierwsze bowiem we wszystkich twierdzeniach o rozwiązalności problemu Cauchy'ego są jakieś ograniczenia na funkcje dane i rozwiązania; w wersji Kowalewskiej nawet dość mocne (analityczność) i nie wszystkie „rozsądnie dane" warunki muszą być takie. Właśnie teoria „katastrof" René Thoma dostrzega, że w rozwoju każdego układu co pewien czas daje się zauważyć „osobliwość": nadmuchiwany balonik pęka nagle, a nie w sposób opisywany funkcją analityczną. To po pierwsze, a po drugie w świecie kwantów i tak nie ma nic pewnego, są tylko zjawiska mniej lub bardziej prawdopodobne. A przecież na zjawiska naszego makroświata jakoś tam wpływa zachowanie się elementarnych cząstek materii. Przewidywanie przyszłości (przynajmniej w zakresie spraw ludzkich) zostawić już należy — na szczęście — przyszłym pokoleniom.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Klub 44

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Zadania nr 52, 53, 54

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1983 r.

52. Na płaszczyźnie dana jest łamana zamknięta $Ł$ o n bokach. Dowieść, że można ponumerować jej wierzchołki kolejno $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ (wybierając stosownie A_0) tak, by dla każdej liczby naturalnej $m < n$ zachodziła nierówność

$$A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{m-1}A_m \geqslant \frac{m}{n}\cdot \text{długość } Ł.$$

53. Dane są liczby rzeczywiste a, b, przy czym $a+b \neq 0$. Udowodnić zbieżność i znaleźć granicę ciągu $\{x_n\}$ określonego wzorem rekurencyjnym: $x_1 = a+b$, $x_{n+1} = a+b-abx_n^{-1}$.

54. a) Czy zbiór wypukły na płaszczyźnie, nie zawierający żadnej półprostej, musi być ograniczony?
b) To samo pytanie dla wypukłego podzbioru przestrzeni trójwymiarowej.

(Zadanie **53** przysłał nasz Czytelnik pan Robert Kowal z Kielc).

Rozwiązania zadań z numeru 12/1982

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
z numeru 9/1982

Jacek Uryga	- Bytom	- 42,05pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	- 37,81pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	- 34,01pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	- 29,75pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	- 23,15pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	- 22,78pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	- 20,78pkt

Współczynniki trudności zadań 31, 32, 33:
2,55 1,27 1,57

40. Pokażemy, że przy podanych założeniach o współczynnikach $a_0, \ldots, a_n$ wszystkie pierwiastki zespolone wielomianu $W(z) = a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ są liczbami o module nie większym od 1. Stąd już wyniknie, że pierwiastki rzeczywiste leżą w przedziale $\langle -1{,}0)$, bo pierwiastków dodatnich nie ma. Niech z będzie dowolnym pierwiastkiem. Przypuśćmy, że $|z| > 1$. Pomnóżmy równość $W(z) = 0$ obustronnie przez $(1-z)$. Dostaniemy $a_0+(a_1-a_0)z+(a_2-a_1)z^2+\ldots+(a_n-a_{n-1})z^n-a_nz^{n+1} = 0$, skąd $z^{n+1} = c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n$, gdzie $c_0 = a_0/a_n$, $c_j = (a_j-a_{j-1})/a_n$, $j = 1, \ldots, n$. Liczby $c_0, \ldots, c_n$ są nieujemne, ich suma równa się 1. Zatem $|z|^{n+1} = \left|\sum c_jz^j\right| \leqslant \sum c_j|z|^j \leqslant \sum c_j|z|^n = |z|^n$, skąd $|z| \leqslant 1$, wbrew przypuszczeniu.

41. Niech A, B, C oznaczają odpowiednio punkty leżące na małym, średnim i dużym okręgu, i niech O będzie wspólnym środkiem tych okręgów. Przy ustalonym położeniu punktów A i B pole trójkąta ABC jest największe, gdy C leży możliwie najdalej od prostej AB, czyli gdy odcinki AB i OC są prostopadłe, przy czym punkty O i C leżą po tej samej stronie prostej AB. Zatem do takich trójkątów wystarczy ograniczyć uwagę. Jeśli x jest odległością prostej AB od punktu O, pole trójkąta ABC wynosi $AB\cdot(OC+x)/2 = \left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{7-x^2}\right)\cdot(4+x)/2$. Badając tę funkcję w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ zwykłą metodą rachunku różniczkowego znajdujemy jej wartość maksymalną równą $9\sqrt{3}/2$ przy $x = 1/2$.

4	8	3	4	8	3	4	8
2	6	7	2	6	7	2	6
9	1	5	9	1	5	9	1
4	8	3	4	8	3	4	8
2	6	7	2	6	7	2	6
9	1	5	9	1	5	9	1
4	8	3	4	8	3	4	8
2	6	7	2	6	7	2	6

42. Ustawmy cyfry od 1 do 9 w „kwadrat magiczny" tak, by suma w każdym rządku poziomym lub pionowym była równa 15. Pokryjmy płaszczyznę siatką takich kwadratów (o wymiarach 3×3) i nałóżmy na to kwadrat 8×8. Jedną z możliwych realizacji widzimy obok. Zdejmowanie pionków z szachownicy możemy interpretować jak usuwanie cyfr z okienek. W każdym ruchu usuwa się trzy cyfry dające w sumie 15. Ponieważ suma wszystkich cyfr w przedstawionym kwadracie równa się $320 = 21\cdot 15+5$, przeto samotna cyfra, która pozostaje po wykonaniu 21 ruchów, musi być piątką. Jej położenie jest, jak widać, określone jednoznacznie, z dokładnością do obrotów szachownicy o 90°, 180°, 270°. Pozostawiamy Czytelnikom sprawdzenie, że wykonanie 21 ruchów jest możliwe. Osamotniony będzie pionek stojący na jednym z czterech wyznaczonych pól.