funkcje dane i rozwiązania; w wersji Kowalewskiej nawet dość mocne (analityczność) i nie wszystkie „rozsądnie dane" warunki muszą być takie. Właśnie teoria „katastrof" René Thoma dostrzega, że w rozwoju każdego układu co pewien czas daje się zauważyć „osobliwość": nadmuchiwany balonik pęka nagle, a nie w sposób opisywany funkcją analityczną. To po pierwsze, a po drugie w świecie kwantów i tak nie ma nic pewnego, są tylko zjawiska mniej lub bardziej prawdopodobne. A przecież na zjawiska naszego makroświata jakoś tam wpływa zachowanie się elementarnych cząstek materii. Przewidywanie przyszłości (przynajmniej w zakresie spraw ludzkich) zostawić już należy — na szczęście — przyszłym pokoleniom.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Klub 44

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Zadania nr 52, 53, 54

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1983 r.

52. Na płaszczyźnie dana jest łamana zamknięta $Ł$ o n bokach. Dowieść, że można ponumerować jej wierzchołki kolejno $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ (wybierając stosownie A_0) tak, by dla każdej liczby naturalnej $m < n$ zachodziła nierówność

$$A_0A_1+A_1A_2+\ \ldots\ +A_{m-1}A_m \geqslant \frac{m}{n}\cdot \text{długość } Ł.$$

53. Dane są liczby rzeczywiste a, b, przy czym $a+b \neq 0$. Udowodnić zbieżność i znaleźć granicę ciągu $\{x_n\}$ określonego wzorem rekurencyjnym: $x_1 = a+b$, $x_{n+1} = a+b-abx_n^{-1}$.

54. a) Czy zbiór wypukły na płaszczyźnie, nie zawierający żadnej półprostej, musi być ograniczony?
b) To samo pytanie dla wypukłego podzbioru przestrzeni trójwymiarowej.

(Zadanie **53** przysłał nasz Czytelnik pan Robert Kowal z Kielc).

Rozwiązania zadań z numeru 12/1982

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
z numeru 9/1982

Jacek Uryga	- Bytom	- 42,05pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	- 37,81pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	- 34,01pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	- 29,75pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	- 23,15pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	- 22,78pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	- 20,78pkt

Współczynniki trudności zadań 31, 32, 33:
2,55 1,27 1,57

40. Pokażemy, że przy podanych założeniach o współczynnikach $a_0, \ldots, a_n$ wszystkie pierwiastki zespolone wielomianu $W(z) = a_0+a_1z+\ \ldots\ +a_nz^n$ są liczbami o module nie większym od 1. Stąd już wyniknie, że pierwiastki rzeczywiste leżą w przedziale $\langle -1{,}0)$, bo pierwiastków dodatnich nie ma. Niech z będzie dowolnym pierwiastkiem. Przypuśćmy, że $|z| > 1$. Pomnóżmy równość $W(z) = 0$ obustronnie przez $(1-z)$. Dostaniemy $a_0+(a_1-a_0)z+ +(a_2-a_1)z^2+\ \ldots\ +(a_n-a_{n-1})z^n-a_nz^{n+1} = 0$, skąd $z^{n+1} = c_0+c_1z+c_2z^2+\ \ldots\ +c_nz^n$, gdzie $c_0 = a_0/a_n$, $c_j = (a_j-a_{j-1})/a_n$, $j = 1, \ldots, n$. Liczby $c_0, \ldots, c_n$ są nieujemne, ich suma równa się 1. Zatem $|z|^{n+1} = \left|\sum c_jz^j\right| \leqslant \sum c_j|z|^j \leqslant \sum c_j|z|^n = |z|^n$, skąd $|z| \leqslant 1$, wbrew przypuszczeniu.

41. Niech A, B, C oznaczają odpowiednio punkty leżące na małym, średnim i dużym okręgu, i niech O będzie wspólnym środkiem tych okręgów. Przy ustalonym położeniu punktów A i B pole trójkąta ABC jest największe, gdy C leży możliwie najdalej od prostej AB, czyli gdy odcinki AB i OC są prostopadłe, przy czym punkty O i C leżą po tej samej stronie prostej AB. Zatem do takich trójkątów wystarczy ograniczyć uwagę. Jeśli x jest odległością prostej AB od punktu O, pole trójkąta ABC wynosi $AB\cdot(OC+x)/2 = (\sqrt{1-x^2}+\sqrt{7-x^2})\cdot(4+x)/2$. Badając tę funkcję w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ zwykłą metodą rachunku różniczkowego znajdujemy jej wartość maksymalną równą $9\sqrt{3}/2$ przy $x = 1/2$.

4	8	3	4	8	3	4	8
2	6	7	2	6	7	2	6
9	1	5	9	1	5	9	1
4	8	3	4	8	3	4	8
2	6	7	2	6	7	2	6
9	1	5	9	1	5	9	1
4	8	3	4	8	3	4	8
2	6	7	2	6	7	2	6

42. Ustawmy cyfry od 1 do 9 w „kwadrat magiczny" tak, by suma w każdym rządku poziomym lub pionowym była równa 15. Pokryjmy płaszczyznę siatką takich kwadratów (o wymiarach 3×3) i nałóżmy na to kwadrat 8×8. Jedną z możliwych realizacji widzimy obok. Zdejmowanie pionków z szachownicy możemy interpretować jak usuwanie cyfr z okienek. W każdym ruchu usuwa się trzy cyfry dające w sumie 15. Ponieważ suma wszystkich cyfr w przedstawionym kwadracie równa się $320 = 21\cdot 15+5$, przeto samotna cyfra, która pozostaje po wykonaniu 21 ruchów, musi być piątką. Jej położenie jest, jak widać, określone jednoznacznie, z dokładnością do obrotów szachownicy o 90°, 180°, 270°. Pozostawiamy Czytelnikom sprawdzenie, że wykonanie 21 ruchów jest możliwe. Osamotniony będzie pionek stojący na jednym z czterech wyznaczonych pól.