Ciągłość, różniczkowalność, całkowalność

Dr Andrzej WOLAK

Nie każda funkcja ciągła jest różniczkowalna. Odpowiedni przykład każdy poda. Ale „na pewno" punkty nieróżniczkowalności takiej funkcji będą izolowane. Jeszcze w 1806 r. Ampére próbował udowodnić, że funkcja ciągła musi być różniczkowalna wszędzie poza pojedynczymi punktami.

Inni autorzy (np. Cauchy) byli bardziej ostrożni i gdy potrzebowali, to zakładali dodatkowo różniczkowalność funkcji ciągłej.

Bernard Riemann (1826—1866) był jednym z najwszechstronniejszych matematyków XIX wieku. Jego prace dotyczą analizy matematycznej, teorii liczb, geometrii, teorii funkcji, mechaniki i fizyki matematycznej i w co najmniej czterech z tych dziedzin znajdą się fundamentalne odkrycia łączone z jego nazwiskiem. Starczy wymienić całkę Riemanna, warunki Cauchy'ego-Riemanna holomorficzności funkcji, funkcję ζ Riemanna w teorii liczb, metrykę riemannowską na rozmaitościach różniczkowych czy wreszcie geometrię Riemanna na płaszczyźnie.

Chcemy tu opisać dwie funkcje badane przez Riemanna. Pierwsza z nich to opisana w pracy habilitacyjnej (1854) funkcja, która między dowolnymi dwoma punktami, choćby bardzo bliskimi, jest nieciągła nieskończenie wiele razy, jest jednakże całkowalna.

W § 6 dysertacji Riemann pisze (symbolika oryginalna — przekład autora artykułu): „Funkcji takich nikt jeszcze nie badał, dlatego wygodnie będzie nam wyjść od określonego przykładu. Oznaczmy dla krótkości przez (x) różnicę między x a najbliższą mu liczbą całkowitą, lub, jeśli x leży akurat w środku odcinka pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi, to średnią arytmetyczną z liczb $1/2$ i $-1/2$, tj. zero; niech następnie n oznacza dowolną liczbę całkowitą, p — liczbę nieparzystą. Wtedy, jak łatwo pojąć, szereg

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \ldots = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn}$$

będzie zbieżny przy wszelkiej wartości x; suma jego przybliża się do określonej granicy, kiedy argument przybliża się do wartości x, stale malejąc lub stale rosnąc. Mianowicie, w przypadku, gdy $x = \frac{p}{2n}$ (przy czym p i n są względnie pierwsze), jest

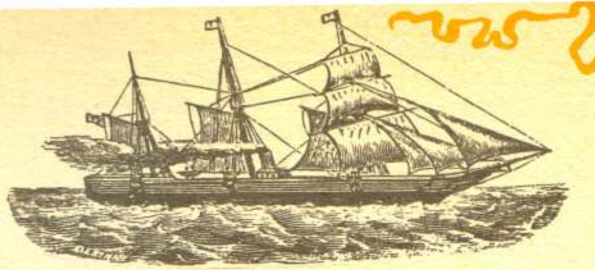
$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2nn}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) - \frac{1}{16nn},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2nn}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) + \frac{1}{16nn},$$

jednakowoż we wszystkich pozostałych przypadkach

$$f(x+0) = f(x), f(x-0) = f(x).$$

I tak oto funkcja $f(x)$ ma punkty nieciągłości dla tych wszystkich wymiernych wartości x, które można przedstawić w postaci ułamka nieskracalnego, mającego parzysty mianownik; wobec tego liczba punktów skoku pomiędzy dowolnie bliskimi granicami jest nieograniczenie duża; jednakże liczba skoków przewyższających z góry zadaną wielkość jest zawsze skończona. Dlatego taką funkcję możemy całkować w dowolnym przedziale."



Ta praca Riemanna wywołała m.in. zainteresowanie „dziwnymi" funkcjami. Nicolas Bourbaki w swojej „Historii matematyki" pisze, że „całka Riemanna znalazła swe naturalne miejsce w prądzie myślowym, który prowadził wtedy do gruntownego zbadania pojęcia ciągłości i funkcji zmiennej rzeczywistej (Weierstrass, Du Bois-Reymond, Hankel, Dini) i miał doprowadzi[ć] do powstania teorii mnogości (Cantor)."

Pierwszy przykład funkcji ciągłej, nie mającej nigdzie pochodnej podał w 1872 r. uczeń Riemanna, Karl Weierstrass. Była to funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi),$$

gdzie a jest nieparzyste, $0 < b < 1$ oraz $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Zauważmy od razu, że wydawać by się mogło, że funkcje o tak dziwnych własnościach mogą być rozpatrywane przez matematyków, ale poza matematyką zastosowania mieć nie mogą. Tymczasem kilka lat temu użyto ich przy opisie ruchów Browna.

Wygłaszając odczyt o „swojej" funkcji Weierstrass powiedział, że przykład ciągłej, nigdzie nie różniczkowalnej funkcji, znał już Riemann, mianowicie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

ale że dowód jest trudny i dlatego lepiej jest podać prostsze przykłady. Nie jest wykluczone, że Weierstrass „dowodu" Riemanna nie przeczytał. Bowiem dopiero w 1913 r. Hardy wykazał, że powyższa funkcja Riemanna istotnie nie ma pochodnej w punktach postaci πy, gdzie y jest liczbą niewymierną bądź liczbą wymierną postaci $\frac{2m}{4n+1}$ lub $\frac{2m+1}{2n}$.

Natomiast w 1970 roku, ponad sto lat po Riemannie, J. Gerverowi udało się obliczyć, że w punktach $\frac{2m+1}{2n+1}$ funkcja Riemanna ma pochodną równą $-\frac{1}{2}$! Dla pozostałych punktów $\left(\text{tj. postaci } \frac{2m}{4n+3}\right)$ różniczkowalność funkcji Riemanna wciąż nie jest rozstrzygnięta.

Historycy matematyki zaczęli więc dociekać, czy Riemann pomylił się, czy też gdzieś nastąpiło „przekłamanie". Choć bowiem Riemann używał tej funkcji przy okazji swych badań w teorii funkcji eliptycznych, nie znaleziono nigdzie jego dowodu, że opisana funkcja nie ma *nigdzie* pochodnej. Dziś specjaliści uważają (opierając się na dostępnych źródłach), że Riemann mówił tylko o „nieróżniczkowalności", zaś jego młody podówczas uczeń zrozumiał „nieróżniczkowalna w każdym punkcie". Erwin Neuenschwander napisał (Mathematical Intelligencer, 1/1978), że Riemann z pewnością wiedział o tej funkcji więcej, niż dziś nam się wydaje.

Nie zmylił się mistrz taki, chciałoby się dodać.