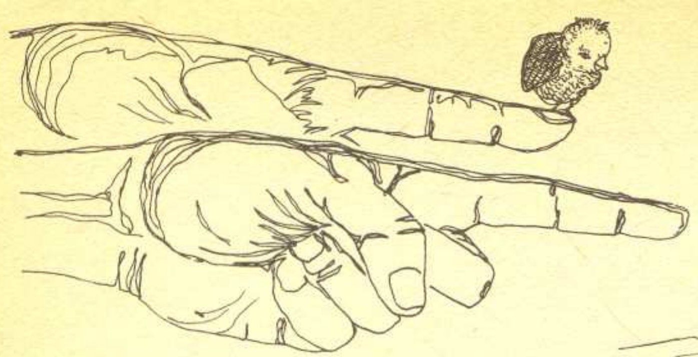
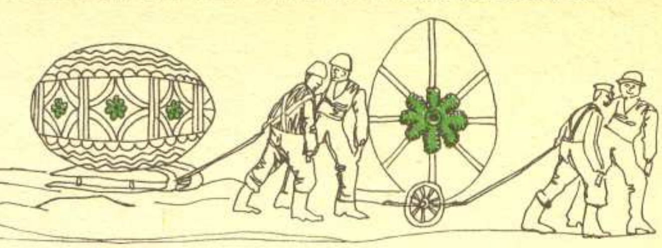


O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb

Mariusz SKAŁBA

Zamieszczony artykuł jest skrótem pracy maturalnej autora, wówczas ucznia IV Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Krośnie. Opiekunką pracy była mgr Lucyna Rędziak. Praca ta została wyróżniona złotym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac Matematycznych w 1982 r., organizowanym przez Polskie Towarzystwo Matematyczne i redakcję *Delty*.



Do napisania niniejszej pracy zainspirowała mnie lektura książki W. Sierpińskiego „Teoria liczb" cz. II. Znajduje się w niej dowód Andrzeja Schinzla, że 7 jest jedyną liczbą pierwszą spełniającą przy naturalnych x, y równanie

$$p = \frac{2x^2-1}{7} = 2y^2-1. \tag{1}$$

Znalazłem inny dowód tego twierdzenia. Oto jego szkic.

Z (1) wynika, że

$$\begin{cases} 7p+1 = 2x^2 \\ p+1 = 2y^2, \end{cases}$$

skąd po wymnożeniu stronami i oznaczeniu $2xy = k$ otrzymujemy:

$$p(7p+8) = (k+1)(k-1). \tag{2}$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc $p|k+1$ lub $p|k-1$. Rozpatrzymy zatem dwa przypadki.

Niech $p|k+1$. Wtedy $k+1 = lp$, $k-1 = lp-2$, gdzie $l \in N$. Jeżeli podstawimy te wartości do równania (2) i rozwiążemy je względem p, to dostaniemy

$$p = \frac{8+2l}{l^2-7}.$$

Nie może być $l = 1$ ani $l = 2$, gdyż byłoby wtedy $p < 0$.
Dla $l = 3$ wzór powyższy daje $p = 7$. Sprawdzamy natychmiast, że trójka liczb $p = 7$, $x = 5$, $y = 2$ spełnia (1).
Nie może być wreszcie $l \geqslant 4$, gdyż wtedy:

$$l(l-1) > 11 \Leftrightarrow \frac{8+2l}{l^2-7} < 2,$$

gdy tymczasem dla każdej liczby pierwszej p jest $p \geqslant 2$.
Rozważając analogicznie przypadek $p|k-1$ stwierdzamy, że nie ma innych liczb pierwszych spełniających (1).

Z analizy tego dowodu wynikła możliwość uogólnienia powyższego wyniku.

Twierdzenie 1

Niech dla $i = 1, 2$, $f_i(x)$ będzie trójmianem kwadratowym o współczynnikach wymiernych. Δ_i — jego wyróżnikiem, a A_i współczynnikiem przy x^2. Jeżeli $\Delta_1\Delta_2$ jest kwadratem liczby wymiernej oraz $A_1\Delta_2 - A_2\Delta_1 \neq 0$, to istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych p, że:

$$p = f_1(x) = f_2(y), \text{ gdzie } x, y \text{ są całkowite.}$$

Z dowodu twierdzenia 1 wynika ponadto efektywna metoda znajdowania wszystkich takich liczb pierwszych w konkretnych przypadkach.

Przykład

Niech m będzie liczbą naturalną oraz:

$$f_1(x) = \frac{x^2+m^2}{m^2+1}, \quad f_2(y) = y^2+1.$$

Ponieważ spełnione są założenia twierdzenia 1, więc istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych p, że:

$$p = \frac{x^2+m^2}{m^2+1} = y^2+1, \text{ gdzie } x, y \in N. \tag{3}$$

Równanie (3) ma natomiast nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych p, x, y, gdyż sprowadza się do równania Pella:

$$x^2-(m^2+1)y^2 = 1.$$

Korzystając ze wspomnianej efektywnej metody można w tym konkretnym przypadku udowodnić twierdzenie o wiele bardziej precyzyjne, a mianowicie:

jeżeli liczby naturalne p, x, y spełniają (3) oraz p jest liczbą pierwszą, to:

$$p = 4m^2+1, \; x = 2m^2+1, \; y = 2m.$$

Twierdzenie 2 (uzupełniające)

Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego $f(x)$ o współczynnikach wymiernych jest kwadratem liczby wymiernej, to istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych p, że:

$$p = f(x), \text{ gdzie } x \text{ jest całkowita.}$$

Analiza założeń twierdzenia 1 i intuicja skłoniły mnie do wysunięcia następujących przypuszczeń.

Przypuszczenie 1

Jeżeli żadna z liczb Δ_1, Δ_2, $\Delta_1\Delta_2$ nie jest kwadratem liczby wymiernej oraz spełnione są następujące warunki:
1) równanie $n = f_1(x) = f_2(y)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych n, x, y,
2) nie ma takiej liczby naturalnej $m > 1$, że dla każdej trójki liczb całkowitych n, x, y spełniającej równanie $n = f_1(x) = f_2(y)$ jest $m|n$,
to istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że:

$$p = |f_1(x)| = |f_2(y)|, \text{ gdzie } x, y \text{ całkowite.}$$

Przypuszczenie 2

Jeżeli żadna z liczb Δ_1, Δ_2 nie jest kwadratem liczby wymiernej, $\Delta_1\Delta_2$ jest takim kwadratem, oraz $A_1\Delta_2 - A_2\Delta_1 = 0$ i spełnione są warunki 1) i 2), to zachodzi teza przypuszczenia 1.
Już gdy napisałem pracę maturalną, profesor Andrzej Schinzel podał mi kontrprzykład obalający przypuszczenie 1. Natomiast przypuszczenie 2 jest prawdopodobnie prawdziwe, gdyż wynika z następującej znanej hipotezy:

jeżeli $f(x)$ jest nierozkładalnym trójmianem kwadratowym o współczynnikach całkowitych i nie ma stałego czynnika większego od 1, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że

$$p = |f(x)|, \text{ gdzie } x \text{ jest całkowite.}$$