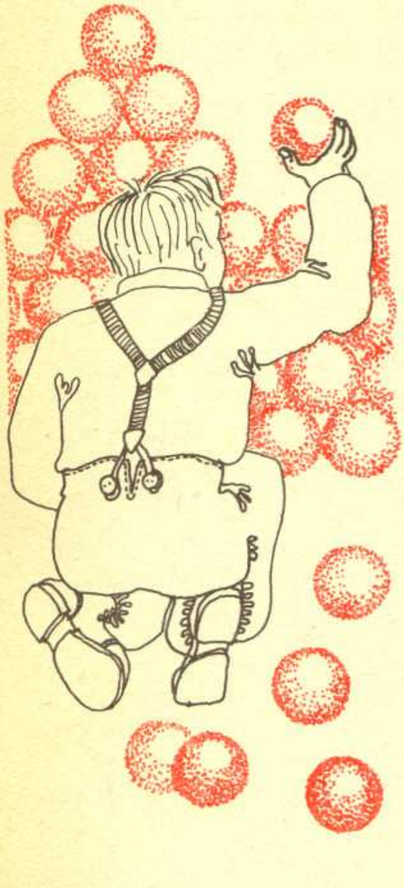
O liniowych równaniach różnicowych

Dr inż. Kazimierz PAWŁOWSKI



Zapewne nie każdy z młodych Czytelników potrafił od razu wyprowadzić wzory na sumy kwadratów, sześcianów, czwartych potęg itd. początkowych n liczb naturalnych. Pokażemy, że znalezienie wspomnianych wzorów jest bardzo proste. Pokażemy też, jak można dojść do wzoru na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego i jak dzielić wielomian mniejszego stopnia przez wielomian większego stopnia. Rozwiązanie powyższych problemów sprowadza się bowiem do rozwiązania pewnych równań różnicowych.

Przejdźmy do omówienia niezbędnych pojęć.

Przez S oznaczmy zbiór wszystkich funkcji skokowych (ciągów), to znaczy funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Równanie, w którym niewiadomą jest taka funkcja $y \in S$, nazywamy równaniem różnicowym.

Definicja. Niejednorodnym równaniem różnicowym liniowym rzędu p o stałych współczynnikach nazywamy równanie funkcyjne postaci

(1) $$y(n+p)+a_1 y(n+p-1)+ \ldots +a_p y(n) = f(n); \quad a_p \neq 0,$$

przy czym $a_1, a_2, \ldots, a_p$ są danymi liczbami rzeczywistymi, $f \in S$ znaną funkcją, natomiast $y \in S$ jest funkcją niewiadomą. Jeśli funkcja f jest tożsamościowo równa zero, to równanie (1) nazywamy jednorodnym.
Na ogół żądamy, by funkcja, która jest rozwiązaniem równania, spełniała jeszcze dodatkowe warunki postaci

(2) $$y(n_0) = d_0,\ y(n_0+1) = d_1, \ldots, y(n_0+p-1) = d_{p-1},$$

gdzie $n_0 \geqslant 0, \quad d_0, d_1, \ldots, d_{p-1} \in R.$

Warunki (2) nazywamy warunkami początkowymi, a rozwiązanie spełniające te warunki – rozwiązaniem szczególnym.
Można wykazać, że równanie (1) ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie spełniające warunki (2).

Metoda rozwiązania równania niejednorodnego wiedzie poprzez rozwiązanie równania jednorodnego

(3) $$y(n+p)+a_1 y(n+p-1)+ \ldots +a_p y(n) = 0.$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (3) nazywamy rodzinę funkcji postaci $y(n, C_1, C_2, \ldots, C_p)$ zawierającą p stałych parametrów, która spełnia to równanie i która wyraża wszystkie rozwiązania szczególne określone przez (2). Zajmiemy się teraz wyznaczeniem rozwiązania ogólnego.

Definicja. Funkcję $y \in S$ nazywamy kombinacją liniową funkcji $y_1, y_2, \ldots, y_m \in S$, jeśli można ją przedstawić w postaci $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m$, gdzie C_i są współczynnikami liczbowymi.

Definicja. Funkcje $y_1, y_2, \ldots, y_m \in S$ nazywamy liniowo zależnymi, jeśli jedna z nich jest kombinacją liniową pozostałych. W wypadku przeciwnym, tzn. jeśli żadna z tych funkcji nie jest kombinacją liniową pozostałych, funkcje te nazywamy liniowo niezależnymi.

Własność(*): jeśli funkcje $y_1, y_2, \ldots, y_m \in S$ są rozwiązaniami równania (3), to również ich kombinacja liniowa jest rozwiązaniem tego równania. Łatwy dowód tej własności pozostawiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie. Jeśli funkcje $y_1, y_2, \ldots, y_p$ spełniają równanie (3) i są liniowo niezależne, to zbiór ich wszystkich kombinacji liniowych

(4) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_p y_p$$

jest rozwiązaniem ogólnym tego równania. Dowód pomijamy. Z powyższego twierdzenia wynika, że w celu znalezienia rozwiązania ogólnego równania (3) wystarczy znaleźć jakikolwiek zespół p funkcji liniowo niezależnych spełniających to równanie i skorzystać ze wzoru (4).

Podamy teraz sposób wyznaczania rozwiązań ogólnych równań I i II rzędu.

Rozważmy najpierw równanie I rzędu postaci

(5) $$y(n+1) - \lambda y(n) = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

Niech $y(0) = 1$. Podstawiając w miejsce n kolejno liczby 1, 2,... otrzymamy

$$y(1) = \lambda y(0) = \lambda, \quad y(2) = \lambda y(1) = \lambda^2, \ldots, \quad y(n) = \lambda y(n-1) = \lambda^n, \ldots$$

Rozwiązanie zadania M 324.

Zauważmy, że

$$w = (\overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_2) + \ldots + (\overrightarrow{OA}_{2n-1} - \overrightarrow{OA}_{2n}) =$$
$$= (\overrightarrow{A_1 A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1} A_{2n}}).$$

Gdy teraz $|w| \neq 0$, oznaczmy przez B_k rzut A_k na średnicę okręgu równoległą do w, a przez v_k – wektor $B_{2k-1} B_{2k}$. Długość w jest nie większa od sumy długości tych wektorów v_k, których zwrot jest zgodny ze zwrotem w. Łatwo jednak zauważyć, że odcinki $B_{2k-1} B_{2k}$ odpowiadające tym wektorom są rozłączne i wobec tego suma ich długości, a więc i długość w nie może przekraczać średnicy okręgu równej 2, c.b.d.o.

Widzimy, że funkcja y dana wzorem $y(n) = \lambda^n$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (5), a jego rozwiązanie ogólne jest postaci

$$y(n) = C\lambda^n, \ C\text{-dowolna stała.} \tag{6}$$

Weźmy teraz pod uwagę równanie rzędu II

$$y(n+2)+a_1\, y(n+1)+a_2\, y(n) = 0, \quad a_2 \neq 0. \tag{7}$$

Fakt, że funkcja wykładnicza jest rozwiązaniem równania I rzędu, pozwala przypuszczać, że rozwiązaniami równania (7) też będą funkcje wykładnicze. Przewidujemy więc rozwiązanie równania rzędu II w postaci $y(n) = \lambda^n$. Podstawiając $y(n) = \lambda^n$, $y(n+1) = \lambda^{n+1}$, $y(n+2) = \lambda^{n+2}$ do (7), a następnie dzieląc je przez λ^n otrzymamy tzw. równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{8}$$

odpowiadające równaniu (7).

O postaci rozwiązań równania (7) decydują pierwiastki równania (8). Rozpatrzmy zatem znane trzy przypadki.

I. $\Delta > 0$. *Równanie (8) ma dwa różne pierwiastki λ_1, λ_2.*

Wówczas mamy dwie funkcje $y_1(n) = \lambda_1^n$, $y_2(n) = \lambda_2^n$ liniowo niezależne (proszę uzasadnić) i spełniające równanie (7). Zatem rozwiązanie ogólne ma postać:

$$y(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

II. $\Delta = 0$. *Równanie (8) ma jeden pierwiastek podwójny $\lambda_0 = \dfrac{-a_1}{2}$.* Znamy więc dopiero jedno rozwiązanie $y_1(n) = \lambda_0^n$. Okazuje się, że drugim rozwiązaniem (w tym przypadku) liniowo niezależnym od pierwszego jest funkcja $y_2(n) = n\lambda_0^n$. Przeto funkcje

$$y(n) = C_1\lambda_0^n + C_2 n\lambda_0^n$$

tworzą rozwiązanie ogólne.

III. $\Delta < 0$. *Teraz pierwiastkami równania (8) są dwie liczby zespolone sprzężone $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.* Zapisując te liczby w postaci trygonometrycznej i korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy dwa rozwiązania zespolone następującej postaci

$$y_1^*(n) = r^n\cos n\varphi + ir^n\sin n\varphi,$$

$$y_2^*(n) = r^n\cos n\varphi - ir^n\sin n\varphi,$$

gdzie $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\varphi = \operatorname{Arg}(\alpha + i\beta)$.

Wykorzystując własność (*) weźmy takie kombinacje funkcji y_1^*, y_2^*, by otrzymać dwa rozwiązania rzeczywiste. Oto szukane kombinacje i funkcje:

$$y_1(n) = \frac{1}{2}y_1^*(n) + \frac{1}{2}y_2^*(n) = r^n\cos n\varphi,$$

$$y_2(n) = \frac{1}{2i}y_1^*(n) - \frac{1}{2i}y_2^*(n) = r^n\sin n\varphi.$$

Tak więc rozwiązanie ogólne w tym przypadku ma postać:

$$y(n) = C_1 r^n\cos n\varphi + C_2 r^n\sin n\varphi.$$

Rozwiązań równania jednorodnego (3) rzędu wyższego niż II też poszukujemy w postaci skokowej funkcji wykładniczej, tj. ograniczenia zwykłej funkcji wykładniczej do argumentów naturalnych. Tok postępowania dla wyznaczenia rozwiązań szczególnych liniowo niezależnych jest analogiczny do tego dla równania rzędu II.

Nieco trudniej jest wyznaczyć rozwiązanie równania niejednorodnego. W wielu jednak przypadkach użyteczny jest

Lemat. Rozwiązanie ogólne y równania niejednorodnego (1) jest sumą rozwiązania ogólnego y_0 równania jednorodnego (3) oraz rozwiązania szczególnego y_s równania (1), co zapisujemy

$$y = y_0 + y_s. \tag{9}$$

Jeśli funkcja f w równaniu niejednorodnym jest wielomianem lub funkcją wykładniczą, ewentualnie sumą lub iloczynem tych funkcji, to y_s można odgadnąć, a ściślej – przewidzieć. W każdym z wymienionych przypadków y_s przewidujemy w tej samej postaci co f, a chwilowo nieokreślone stałe wyznaczamy z warunku, że y_s ma być rozwiązaniem równania niejednorodnego (1).

Uwaga. Jeśli liczba 1 jest k-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, a f jest wielomianem, to y_s przewidujemy w postaci: $y_s = n^k W(n)$, gdzie W jest wielomianem stopnia mniejszego niż stopień f.

Rozwiązanie zadania F 129.

Niestety, nie jest to *perpetuum mobile* drugiego, ani tym bardziej pierwszego rodzaju. Błąd w rozumowaniu polega na pominięciu faktu, iż prężność pary nasyconej zależy od krzywizny powierzchni cieczy. Nad powierzchnią wklęsłą prężność pary nasyconej jest mniejsza niż nad płaską i to właśnie o tyle, że w naszym układzie nie mogą wystąpić przepływy. W pomieszczeniu panuje równowaga termodynamiczna. Fakt ten pozwala na bardzo proste wyprowadzenie ilościowej zależności prężności pary nasyconej od promienia krzywizny powierzchni cieczy. Ograniczymy się do przypadku, gdy wysokość kapilarnego wzniesienia jest na tyle mała, że gęstość pary nie zależy od wysokości. Niech: $P(r)$ – prężność pary nasyconej nad cieczą w rurce; P_∞ – prężność pary nasyconej nad powierzchnią płaską. Z warunku równowagi cieczy w rurce włoskowatej otrzymujemy, że

$$P(r) + \Delta p + \varrho_c g h = P_\infty, \tag{1}$$

gdzie Δp – dodatkowe ciśnienie spowodowane krzywizną powierzchni; ϱ_c – gęstość cieczy. Z drugiej strony

$$P(r) + \varrho_p g h = P_\infty. \tag{2}$$

Rozwiązując układ równań (1) i (2) mamy

$$h = -\frac{\Delta p}{(\varrho_c - \varrho_p)g} \quad \text{i}$$

$$P(r) = P_\infty + \frac{\varrho_p}{\varrho_c - \varrho_p}\Delta p. \tag{3}$$

W naszym przypadku

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{r}, \quad \text{więc}$$

$$P(r) - P_\infty = -\frac{\varrho_p}{\varrho_c - \varrho_p}\frac{2\sigma}{r} < 0.$$

Wzór (3) jest słuszny dla dowolnego kształtu powierzchni cieczy. Dla kropli kulistej o promieniu R otrzymujemy:

$$P(r) - P_\infty = \frac{\varrho_p}{\varrho_c - \varrho_p}\frac{2\sigma}{R} > 0.$$

Zmiany prężności pary nasyconej spowodowane krzywizną powierzchni cieczy zazwyczaj nie są zbyt wielkie, odgrywają jednak podstawową rolę w procesach wrzenia i skraplania. Dla kropli wody o promieniu rzędu 10^{-5} m (mgła),

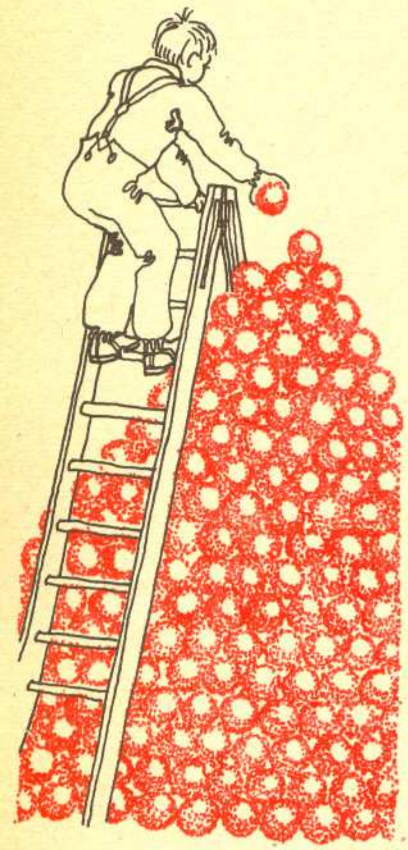
$$\frac{P(r) - P_\infty}{P_\infty} = 1\%,$$

dla jeszcze mniejszych efekt wzrostu prężności jest już znaczny i wyprowadzony przez nas wzór przestaje obowiązywać (dlaczego?).

Jako ćwiczenie warto zastanowić się nad:

1. rozkładem ciśnień w obrębie rurki włoskowatej rozważanej w niniejszym zadaniu. Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy ciecz ma niską prężność pary nasyconej i duże napięcie powierzchniowe, a promień kapilary jest mały;

2. zachowaniem kropelek rtęci o różnych promieniach rozlanej w niewielkiej, zamkniętej przestrzeni.



Po tej części teoretycznej, siłą rzeczy lakonicznej, prześledźmy kilka przykładów.

A. Wyznaczyć wzór na sumę kwadratów n początkowych liczb naturalnych, tzn.

$$S(n) = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2.$$

Ponieważ $S(n+1) = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2$, więc odejmując stronami te równości, otrzymamy równanie różnicowe I rzędu

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} S(n+1)-S(n) = n^2+2n+1, \\ S(1) = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest tu funkcją stałą; $S_0(n) = C$, natomiast rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego przewidujemy w postaci: $S_s(n) = n(A_1 n^2+B_1 n+C_1)$. Wielomian $A_1 n^2+B_1 n+C_1$ pomnożyliśmy przez n, ponieważ liczba 1 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Podstawiając $S_s(n) = A_1 n^3+B_1 n^2+C_1 n$ i $S_s(n+1) = A_1(n+1)^3+B_1(n+1)^2+C_1(n+1)$ do (10) i przyrównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej n otrzymamy $A_1 = \frac{1}{3}$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $C_1 = \frac{1}{6}$. Zatem

$$S(n) = C+\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

Uwzględniając warunek początkowy dostajemy poszukiwany wzór.

$$S(n) = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}.$$

Analogicznie możemy wyprowadzić wzory na sumy wyższych potęg n początkowych liczb naturalnych.

B. Wyprowadzić wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... Ciąg Fibonacciego charakteryzuje się tym, że każdy wyraz oprócz pierwszego i drugiego jest sumą dwóch poprzedzających go wyrazów.

Przez $y(n)$ oznaczmy n-ty wyraz ciągu Fibonacciego. Z jego określenia wynika, że spełnia on równanie

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} y(n+2)-y(n+1)-y(n) = 0, \\ y(1) = 1, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Równaniu (11) odpowiada równanie charakterystyczne postaci

$$\lambda^2-\lambda-1 = 0$$

mające pierwiastki

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązanie ogólne wyraża funkcja

$$y(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Uwzględniwszy warunki początkowe dla wyznaczenia rozwiązania szczególnego, dostajemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 C_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 C_2 = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

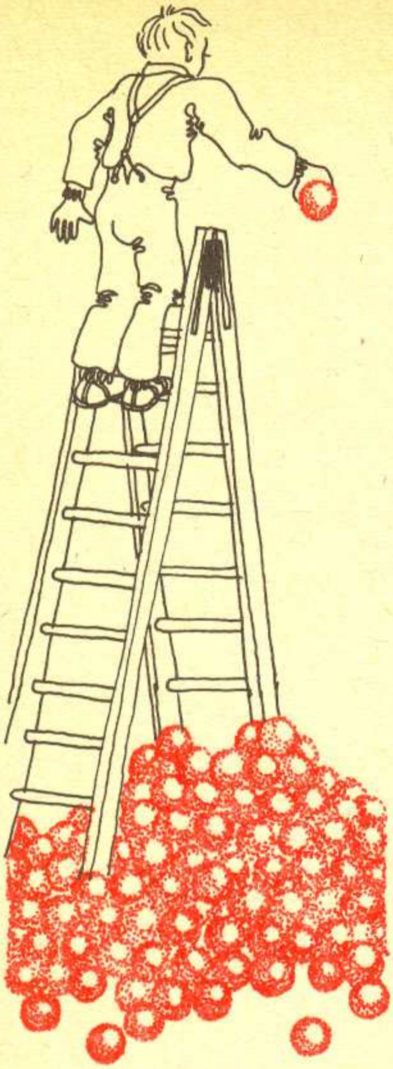
Poszukiwany wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego jest zatem następujący

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Ciąg, który spełnia jednorodne liniowe równanie różnicowe o stałych współczynnikach, nazywamy ciągiem rekurencyjnym (albo ciągiem zadanym rekurencyjnie). Łatwo wykazać, że dla ciągu rekurencyjnego można wyznaczyć wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu, nie wyznaczając wzoru na n-ty wyraz. Zilustrujemy tę uwagę przykładem.

Rozwiązanie zadania M 322.

Niech dla liczby naturalnej M symbol M' oznacza liczbę powstałą z M przez przestawienie pierwszej cyfry na koniec. Oznaczając przez x_m pierwszą cyfrę m-cyfrowej liczby M mamy
$10M-M' = x_m(10^{m+1}-1) =$
$= 9x_m(10^m+10^{m-1}+\ldots+10+1)$.
Bezpośrednim dzieleniem sprawdzamy że liczba złożona z 16 jedynek:
$1111111111111111 = 10^{15}+10^{14}+\ldots+10^2+$
$+10+1$ dzieli się przez 17, a żadna mniejsza liczba z powtórzonych jedynek – nie.
Tak więc jeżeli $17|M$, to $17|M'$, gdy $16|m+1$, tj. gdy M jest liczbą $16k$-cyfrową, $k = 1, 2, \ldots$.
Najmniejszą 16 cyfrową wielokrotnością liczby 17 jest 1000000000000005, bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że ma ona opisaną własność.



C. Wyznaczyć wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu, którego wyrazy spełniają związek

$$y(n+2)-2y(n+1)+y(n)=0, \quad y(1)=1, \quad y(2)=2.$$

Niech $S(n)=y(1)+y(2)+\ldots+y(n)$.
Wówczas $S(n+1)=S(n)+y(n+1), \quad S(n+2)=S(n+1)+y(n+2),$
$S(n+3)=S(n+2)+y(n+3), \quad y(n+3)-2y(n+2)+y(n+1)=0.$
Po wykonaniu elementarnych przekształceń otrzymamy równanie

$$\left\{\begin{array}{l} S(n+3)-3S(n+2)+3S(n+1)-S(n)=0, \\ S(1)=1, \quad S(2)=3, \quad S(3)=8. \end{array}\right. \tag{12}$$

Odpowiada mu równanie charakterystyczne

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0,$$

którego potrójnym pierwiastkiem jest liczba -1. A więc $S(n)=(C_1+C_2n+C_3n^2)(-1)^n$.
Po uwzględnieniu warunków początkowych dostajemy oczekiwany wzór

$$S(n)=(-1)^n\frac{-40+53n-15n^2}{2}.$$

W szkole poznajemy algorytm dzielenia wielomianu P przez wielomian Q przy założeniu, że stopień P jest większy niż stopień Q. Teraz przedstawimy algorytm dzielenia tych wielomianów, gdy st $P<$ st Q i $Q(0)\neq 0$.

Wyznaczyć iloraz z dzielenia wielomianu $P(x)=2+x$ przez wielomian $Q(x)=1+x+x^2$.
Ów iloraz znajdujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{l}
(2+x):(1+x+x^2)=2-x-x^2+2x^3-\ldots \\
\underline{-2-2x-2x^2} \\
\quad -x-2x^2 \\
\quad \underline{x+x^2+x^3} \\
\qquad -x^2+x^3 \\
\qquad \underline{x^2+x^3+x^4} \\
\qquad\quad 2x^3+x^4 \\
\qquad\quad \underline{-2x^3-2x^4-2x^5} \\
\qquad\qquad -x^4-2x^5\ldots
\end{array}$$

Proces dzielenia musimy jednak przerwać, ponieważ iloraz zawiera nieskończenie wiele składników... Okazuje się, że można wyznaczyć wzór na współczynniki tego „nieskończonego" wielomianu, który poprawnie nazywa się szeregiem potęgowym. Weźmy dwa wielomiany: $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_lx^l$, $Q(x)=1+b_1x+\ldots+b_px^p$, przy czym st $Q>$ st P.
Chcemy iloraz tych wielomianów wyrazić w postaci szeregu potęgowego, tzn. by w pewnym przedziale $(-\delta, \delta)$ zachodziła równość

$$\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_lx^l}{1+b_1x+\ldots+b_px^p}=d(0)+d(1)x+\ldots+d(k)x^k+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}d(n)x^n, \tag{13}$$

gdzie $d(k)$ jest współczynnikiem stojącym przed x^k.

Twierdzenie. Współczynniki $d(n)$ w równości (13) spełniają następujące równanie różnicowe

$$d(n+p)+b_1d(n+p-1)+\ldots+b_pd(n)=0. \tag{14}$$

Powyższe twierdzenie wyraża jedno z ciekawszych zastosowań równań różnicowych z uwagi na częstą potrzebę przedstawiania funkcji wymiernych w postaci sum szeregów potęgowych. Warunki początkowe, czyli wartości początkowych współczynników $d(0), d(1), \ldots, d(p-1)$ znajdujemy albo poprzez wykonanie p kroków w dzieleniu wg podanego algorytmu, albo mnożąc równość (13) przez $(1+b_1x+\ldots+b_px^p)$ i przyrównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x. Rozwiązanie równania (14) (z uwzględnieniem warunków początkowych) daje nam wzór na $d(n)$.

D. Przedstawić w postaci szeregu potęgowego funkcję wymierną $\dfrac{2+x}{1+x+x^2}$

tzn.
$$\frac{2+x}{1+x+x^2}=d(0)+d(1)x+d(2)x^2+\ldots$$

Z wcześniej wykonanych obliczeń wynika, że $d(0)=2$, $d(1)=-1$. Na mocy zaś przytoczonego twierdzenia poszukiwane współczynniki $d(n)$ spełniają równanie:

$$\left\{\begin{array}{l} d(n+2)+d(n+1)+d(n)=0, \\ d(0)=2, \\ d(1)=-1. \end{array}\right. \tag{15}$$

Rozwiązując równanie (15) otrzymamy, że

$$d(n)=2\cos\frac{2}{3}\pi n, \text{ zatem } \frac{2+x}{1+x+x^2}=2-x-x^2+2x^3-\ldots=2\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{2}{3}\pi n\cdot x^n \text{ dla } |x|<1.$$

Rozwiązanie zadania M 323.

Oznaczając $a_n=x_1^n+x_2^n$ mamy

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)a_n&=(x_1+x_2)(x_1^n+x_2^n)=\\ &=x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+x_1^nx_2+x_1x_2^n=\\ &=a_{n+1}+x_1x_2(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})=\\ &=a_{n+1}+x_1x_2a_{n-1},\end{aligned}$$

skąd i ze wzorów Viete'a ($x_1+x_2=6$, $x_1x_2=1$) otrzymujemy wzór rekurencyjny:

$$a_{n+1}=6a_n-a_{n-1}, \quad a_0=2, \quad a_1=6.$$

Oznaczając teraz przez r_n resztę z dzielenia a_n przez 5 otrzymamy, że $r_{n+1}=r_n-r_{n-1}$ (mod 5) i ponieważ r_{n+1} zależy tylko od r_n i r_{n-1}, ciąg r_n musi być okresowy z okresem $\leqslant 25$.

Sprawdzamy: $r_0=2, r_1=1, r_2=4,$
$r_3=3, r_4=4, r_5=1,$
$r_6=2, r_7=1, \ldots$, a więc
$r_{k+6}=r_k$
i w okresie (2, 1, 4, 3, 4, 1) nie występuje 0, a więc żadna z liczb a_n nie jest podzielna przez 5, c.b.d.o.

Uwaga: Teza naszego zadania pozostaje prawdziwa również dla wykładników ujemnych. Jest bowiem

$$a_{-n}=\frac{1}{x_1^n}+\frac{1}{x_2^n}=$$

$$=\frac{x_1^n+x_2^n}{x_1^nx_2^n}=\frac{a_n}{1}=a_n.$$

E. Ile jest przekątnych w wieloboku wypukłym o $n \geqslant 3$ wierzchołkach?
Przez dołączenie jednego wierzchołka liczba przekątnych wzrośnie o $n-1$. Więc dla tego zagadnienia możemy napisać równanie

$$\begin{cases} y(n+1) - y(n) = n-1, \\ y(3) = 0, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest funkcja $y(n) = \dfrac{n(n-3)}{2}$ wyrażająca liczbę przekątnych.

Innego rodzaju zastosowania otrzymuje się, gdy rozważa się równania różnicowe liniowe o zmiennych współczynnikach. Na przykład obliczenie całki

$$J(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

sprowadza się do rozwiązania równania

$$J(n+2) - \frac{n+1}{n+2} J(n) = 0, \quad J(0) = \frac{\pi}{2}, \quad J(1) = 1.$$

Na zakończenie wspomnijmy, że równania różnicowe, oprócz zastosowań w różnych działach matematyki, służą do opisu modeli pewnych układów dynamicznych, zjawisk ekonomicznych i innvch.

Magister Pirożyński opowiada...

Piszę do Was, drodzy Czytelnicy *Delty*, jeszcze jako magister, ale już wkrótce będę się podpisywać krócej, ale jakże przyjemniej: Dr Pirożyński. Robię bowiem doktorat. Z zastosowań matematyki, czy jak to się teraz mówi, z matematyki stosowanej. Dokładniej: z optymalizacji zagadnień transportu. W latach kryzysu paliwowego jest to zagadnienie o wiodącym znaczeniu. Nikt nie chciał docenić wagi moich badań. Na szczęście przed półtora rokiem sytuacja się zmieniła. Ale zacznijmy, jak mówi stare rosyjskie przysłowie, ab ovo.

Kształt kulisty nie jest „ekonomiczny" – najciaśniej upakowane kule zajmują ok. 3/4 miejsca w przestrzeni. Pozostałe 25 procent marnuje się bezproduktywnie. Lepszy jest oczywiście kształt prostopadłościenny – ciasno upakowane klocki każdy widział. Warto zauważyć, że i czworościanami można wypełnić przestrzeń całkowicie. W niektórych krajach mleko sprzedaje się w czworościennych pojemniczkach, upchniętych w dużym, też oczywiście czworościennym kartonie.

Prasa doniosła kiedyś, że pomysłowi Amerykanie wyhodowali „kwadratowe" pomidory i że próbują zmusić kury do znoszenia takichż jajek (biedne kury...). Wszystko po to, by łatwiej było je (pomidory i jajka, nie kury!) transportować i przechowywać. Bardziej naukowo podszedł do zagadnienia pewien hodowca z Ohio, nazwiskiem Stanley Blecker. Postanowił on rozstrzygnąć eksperymentalnie, jaki kształt byłby najlepszy dla jego brzoskwiń: czworościenny, sześcienny, a może zupełnie inny.

W tym celu sypał owoce do plastykowego worka, który następnie ściskał (nie bardzo mocno) w prasie hydraulicznej. Patrząc na zmasakrowane zwłoki pięknych przed momentem brzoskwiń próbował Blecker odgadnąć optymalny kształt, do jakiego powinien je namawiać. Po długich badaniach doszedł do wniosku, że najlepszym takim kształtem będzie... graniastosłup prosty o podstawie ośmiokątnej...

Wyniki Bleckera wydały mi się podejrzane i zamierzam je obalić. Już dawno temu próbowałem w najrozmaitszych uczelniach uzyskać pieniądze na zakup kilkudziesięciu ton brzoskwiń (prasę mam), ale wszyscy odpowiadali mi, że równie dobre będą piłeczki pingpongowe. Teraz już nie – celuloid sprowadzamy z II obszaru płatniczego, a brzoskwinie mamy w kraju. A jeśli nawet nie, to niech będą i morele. Powidła morelowe – pycha!

Wasz zapracowany mgr Π-ϱ – żyński

Rozwiązanie zadania F 128.

Po ustaleniu się równowagi menisk cieczy w węższej rurce znajdzie się na identycznej jak poprzednio wysokości H. Przeniesienie rurki nie zmienia kształtu menisku, nie ulega więc zmianie dodatkowe ciśnienie, spowodowane krzywizną powierzchni cieczy, od którego zależ wysokość kapilarnego wzniesienia. Zgodnie ze wzorem Laplace'a ciśnienie to wynosi

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

gdzie σ – napięcie powierzchniowe cieczy,
r_1, r_2 – tzw. główne promienie krzywizny powierzchni w danym punkcie.
Dla doskonałej zwilżalności ścianek rurki przez ciecz $r_1 = r_2 = -r$ (r jest promieniem wewnętrznym węższej kapilary),

a $\quad p_1 = -\dfrac{2\sigma}{r}\left(p_2 = -\dfrac{2\sigma}{R} \text{ dla rurki szerszej}\right).$

Z warunku równowagi cieczy w rurce wynika, że

$$p_{at} + \Delta p_1 + \varrho_c g H = p_{at},$$

gdzie p_{at} – ciśnienie atmosferyczne, ϱ_c – gęstość cieczy.
Po podstawieniu otrzymujemy, że wysokość, na którą wzniesie się ciecz wynosi

$$H = \frac{2\sigma}{\varrho_c g r}.$$

Wstawienie rurki węższej może znacznie zmienić poziom cieczy w rurce szerszej. Gdy średnica zewnętrzna rurki wkładanej jest bliska średnicy wewnętrznej rurki szerszej, wtedy ciecz w przestrzeni między kapilarami może unieść się bardzo wysoko. Zakładając doskonałą zwilżalność wszystkich powierzchni i współosiowość ustawienia rurek stwierdzamy, że skok ciśnienia wynosi

$$\Delta p_3 = -\frac{2\sigma}{R-r}; \quad \left(r_1 \to \infty; \quad r_2 = -\frac{R-r}{2}\right).$$

Przytoczone rysunki przedstawiają rozkłady ciśnień jako funkcje wysokości dla poszczególnych przypadków. A jaka sytuacja miałaby miejsce, gdyby ciecz nie zwilżała zewnętrznej powierzchni rurki cieńszej?