Skrót regulaminu

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązanie danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Zadania nr 46, 47, 48

Termin nadsyłania rozwiązań: 30.04.1983 r.

46. Ile pierwiastków ma równanie $a^x = \log_a x$?
(a jest ustaloną liczbą dodatnią różną od 1).

47. Dowieść, że każda liczba naturalna ma wielokrotność, której zapis dziesiętny składa się tylko z zer i jedynek.

48. Kostką 6-wymiarową I^6 nazywamy zbiór punktów $(x_1,\dots,x_6)$ przestrzeni 6-wymiarowej $\boldsymbol{R}^6$, których współrzędne x_i spełniają nierówności $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $i=1,\dots,6$. Spośród wierzchołków kostki I^6 wybrano losowo trzy. Co jest bardziej prawdopodobne: czy to, że utworzą one trójkąt ostrokątny, czy to, że utworzą trójkąt prostokątny?

(Zadanie 46 przysłał nasz Czytelnik, p. Andrzej Zieliński z Warszawy)

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 7/1982

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	43,22pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	30,00pkt
Jacek Uryga	- Bytom	29,76pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	26,83pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	19,27pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	17,73pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	17,27pkt

Współczynniki trudności zadań 25, 26, 27 :
3,55 1,85 1,50

Redaguje
dr Marcin E. Kuczma

Chochlik drukarski - i niestety nie tylko drukarski - wkradł się do tekstów Klubu 44 w numerach 9,10/1982.

Iloczyn w zadaniu 33 był w zamierzeniu liczbą ośmiocyfrową; zgubienie jednej gwiazdki odebrało zadaniu wdzięk i sens. Dla odmiany, banalne zadanie 32 zostało zamieszczone wskutek bardzo dziwnej omyłki w miejsce interesującego zadania geometrycznego, którego rozwiązanie znaleźli Czytelnicy ze zdumieniem w numerze 1/1983. Ponieważ wydrukowane zadania formalnie sens matematyczny mają, więc ich rozwiązania będą ocenione i włączone do punktacji; szkoda tylko, że zniekształcenia tekstów pozbawiły Czytelników przyjemności z rozwiązywania.

Dalej, w numerze 10/1982 błędnie podaliśmy współczynnik trudności zadania 17 - miało być: 2,80.

Za te pomyłki i niedopatrzenia redakcja gorąco przeprasza autora i uczestników konkursu ligowego oraz wszystkich Czytelników.

Rozwiązanie zadań z numeru 10/1982

34. Załóżmy wbrew tezie, że $s_n(x)=(x-a)^2v(x)$. Wówczas wielomian $s_n(x+a)=x^2v(x+a)$ ma współczynniki przy x^0 i x^1 równe zeru. Ale

$$s_n(x+a)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}a^{k-j}x^j.$$

Grupując składniki według potęg x przekonujemy się, że wyraz wolny równa się $s_n(a)$, zaś współczynnik przy x równa się $s_n(a)-a^n/n!$. Obie te liczby mają być równe zeru, zatem $a=0$, skąd $s_n(x)=x^2v(x)$. Sprzeczność, bo $s_n(0)=1$.

35. Rozwiązanie oprzemy na następujących spostrzeżeniach:
(1) Nie istnieje w zbiorze Z czwórka punktów, z których jeden leży wewnątrz trójkąta utworzonego przez pozostałe trzy. (Gdyby bowiem $A, B, C, D\in Z$, $D\in \operatorname{int} ABC$, to punkty przecięcia prostych AD, BD, CD z bokami trójkąta ABC należałyby do Z i, kontynuując rozumowanie, otrzymalibyśmy nieskończony ciąg trójkątów o wierzchołkach w Z).

(2) Jeśli na pewnej prostej leżą co najmniej trzy punkty zbioru Z, to po każdej stronie tej prostej leży co najwyżej jeden punkt zbioru Z. (Gdyby po którejś stronie leżały dwa, musiałaby powstać konfiguracja, o jakiej mowa w uwadze (1)).

(3) Jeśli punkty $A, P, B\in Z$ leżą na jednej prostej, P między A i B, i jeśli po każdej stronie tej prostej leży punkt zbioru Z – oznaczmy te punkty przez K i L – to P jest punktem przecięcia prostych AB i KL, przy czym żadna z tych prostych nie zawiera już innych punktów zbioru Z. (W przeciwnym razie mielibyśmy po którejś stronie którejś z tych prostych więcej niż jeden punkt zbioru Z, wbrew uwadze (2)).

(4) W sytuacji opisanej w uwadze (3) punkty A, B, K, L muszą być wierzchołkami równoległoboku, P – jego środkiem symetrii, i punkty te wyczerpują cały zbiór Z. (Łatwy wniosek z (3) i z (2)).

Z poczynionych uwag wynika odpowiedź: Albo Z jest zbiorem n punktów, z których $n-1$ leży na jednej prostej (pozostały leży poza tą prostą), albo Z składa się z 5 punktów – wierzchołków równoległoboku i jego środka.

36. Zgodnie z założeniem,

$$N=\sum_{k=0}^{999}k\cdot 1000^{n_k}, \qquad \text{gdzie } (n_0, n_1, \dots, n_{999})$$

jest pewną permutacją układu liczb (0, 1, ..., 999). Ponieważ $1000\equiv 1 \pmod{999}$, więc

$$N\equiv\sum_{k=0}^{999}k=999\cdot 500\equiv 0 \ (\text{mod. } 999),$$

co oznacza, że N dzieli się przez 999, a tym bardziej przez 37 (jako że $999=27\cdot 37$).