Co sądzić o szkolnej matematyce?

(rozmowa z dr Jerzym Lisiewiczem)

— Uczy Pan w szkole od 35 lat, jest Pan także pracownikiem naukowym Instytutu Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego. Czym różni się matematyka szkolna od ... tej innej? Czy w ogóle jest coś takiego, jak „matematyka szkolna"?

— Przecież i Pan uczy w szkole! Matematyka, której nauczamy w szkole jest — na mocy definicji, że się tak wyrażę — matematyką szkolną.

— No tak, ale czy my uczymy w szkole tej „prawdziwej" matematyki?

— Uczymy w liceum ogólnokształcącym. Jak wskazuje sama jego nazwa, ma ono dać wiedzę ogólną, w tym i z matematyki. Nie zmienia sytuacji to, że nasze liceum ma specjalny profil matematyczny. Na lekcjach matematyki ćwiczymy uczniów w „rozgryzaniu" problemów; jeśli potem nawet szczegółowe wiadomości wylecą z głowy, nie jest to najważniejsze. Uczymy ich logicznego myślenia, umiejętności dostrzegania problemów, ich analizowania i przekładania na własny język. To chyba więcej niż połowa drogi do rozwiązania.

— Wizja społeczeństwa, w którym każdego uczono by tylko tego, co mu się w życiu przyda, wygląda bardzo rozsądnie, ale w gruncie rzeczy jest przerażająca. Musiałby bowiem być ktoś, kto by decydował, co się komu przyda za rok, dwa lata, pięć, dwadzieścia ...

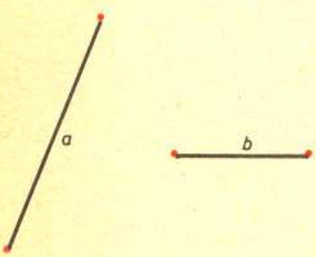
— Proszę Pana, kilka lat temu Akademia Medyczna w Białymstoku przysłała do XIV Liceum im. K. Gottwalda w Warszawie (prowadzącego klasy dla uczniów specjalnie uzdolnionych matematycznie) list z gratulacjami i podziękowaniem za świetne przygotowanie uczniów do studiów wyższych w ich uczelni. Inny absolwent eksperymentalnej klasy matematycznej został świetnym historykiem (pracuje na Wydziale Historii Uniwersytetu). Dla mnie to po pierwsze świadczy o tym, że ucząc młodzież matematyki uczymy ją w gruncie rzeczy czegoś znacznie więcej, choć bliżej nieokreślonego: rzetelności, umiejętności myślenia, odróżniania rzeczy ważnych od mniej ważnych, a nawet skromności i szacunku dla wysiłków poprzedników. Po drugie: nie ma oddzielnych uzdolnień do matematyki, oddzielnych do fizyki, chemii itd., tak jak nie ma osobnych uzdolnień do języka niemieckiego, angielskiego czy swahili. Są tylko uzdolnienia (czy predyspozycje) językowe, muzyczne, ruchowe i uzdolnienia do myślenia abstrakcyjnego. Ucząc młodzież matematyki rozwijamy jej wrodzone (w mniejszym lub większym stopniu) te zdolności umysłowe. Czym innym są natomiast zainteresowania. Można interesować się matematyką, fizyką, astronomią itd., tak jak można interesować się językiem swahili.

— To może lepiej byłoby rozwijać te zdolności na czym innym? Na przykład na naukach przyrodniczych: fizyce, chemii, biologii lub, przeciwnie, na naprawdę nowoczesnej matematyce? Może na teorii liczb?

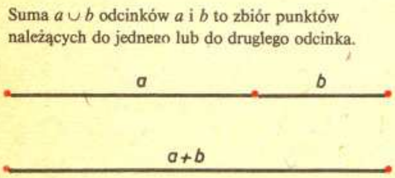
— Z gorszym skutkiem. Fizyka czy chemia są „zanadto eksperymentalne" — ćwiczenia umysłu są utrudnione przez konieczność poznania wielu faktów uzyskanych doświadczalnie. Z tego też powodu nie można nauczać w szkole rozwiniętych teorii współczesnej matematyki ani teorii liczb, bo ta szybko staje się bardzo trudna. Ponadto klasykę trzeba poznać przede wszystkim. Poza tym (co właściwie wiąże się z poprzednim) nowoczesne teorie matematyczne są często mocno sformalizowane i zaksjomatyzowane. Świadczy to o dojrzałości teorii, ale żeby ją zrozumieć, trzeba dobrze znać tę konkretną „rzeczywistość" matematyczną. Lecąc w chmurach należy zachować poczucie kierunku.

— Kiedyś uczono sztuki myślenia ucząc języków starożytnych ...

— Wie Pan, z tym jest ciekawa sprawa. Teraz rzeczywiście nowożytnych języków naucza się po to, by uczący się mógł potem w obcym kraju porozumieć się na ulicy. Łaciny czy greki uczono po to, by dać uczniom dostęp do kultury, ale także by nauczyć ich analizy trudnych zdań. Analiza tekstów Cezara, Cycerona, nie mówiąc już o poezji np. Owidiusza nie gorzej ćwiczyła umysł niż zadania na dowodzenie w geometrii. A ciągnąc porównanie „językowe" to naukę matematyki w szkole podstawowej przyrównałbym do modnej obecnie praktycznej nauki języka obcego: umożliwić porozumienie się. Dopiero w szkole średniej jest miejsce na spokojną analizę, gramatykę i składnię. Właśnie od czasu, kiedy niektóre zagadnienia matematyki szkoły średniej przerzucono do podstawówki, nauczyciele szkół podstawowych stanęli bezradni. To nie była ich matematyka! Nie rozumieli potrzeby (i wobec tego nie potrafili przekonać uczniów) o konieczności dowodzenia twierdzeń typu „każdy widzi". Nie rozumieli roli niektórych pojęć. W jednej ze szkół nauczycielka tępiła wypowiedzi uczniów w rodzaju „mam dwa jabłka". Należało mówić „mam dwuelementowy zbiór jabłek". Inny nauczyciel zapytał mnie kiedyś, jak narysować sumę dwóch odcinków, o takich (rysunek obok). „Już jest narysowana", odpowiedziałem. „Tak uczyć nie mogę", odparł nauczyciel. „Dzieciom muszę to wytłumaczyć tak: ustawiamy te odcinki jeden za drugim i ścieramy oddzielającą je kreskę. Długi odcinek jest wtedy sumą tych dwóch krótszych". Oto jak daje znać o sobie matematyka dotychczasowej szkoły podstawowej.



Suma $a \cup b$ odcinków a i b to zbiór punktów należących do jednego lub do drugiego odcinka.



Dodawanie odcinków w matematyce szkoły podstawowej.

— Sądzę, że podobny błąd popełniono w 1973 roku, kiedy rozpoczęto masowe produkowanie magistrów z nauczycieli, głównie szkół podstawowych. Wtłaczano im do głowy tzw. matematykę wyższą, której pojąć nie byli w stanie nie tylko z powodu wieku, braku zdolności i przeciążenia obowiązkami domowymi i zawodowymi, ale w dużej części też i dlatego, że przywykli już do innego pojmowania matematyki.

Odpowiedź na zadanie ze strony 3:

$2\sqrt{3}+\sqrt{3\sqrt{3}-5}$.

– Próbowaliśmy w klasach matematycznych XIV L. O. nauczać geometrii metodą aksjomatyczną, wyprowadzając wszystko ze starannie dobranych pewników. Brr, to było okropne! Jeszcze dziś pamiętam, że któregoś roku przyjęliśmy dość słaby układ aksjomatów i aby ze zdania „odcinek ma środek" wyprowadzić, że „odcinek ma dokładnie jeden środek" potrzebowałem ... 2 lekcji. Aby móc aksjomatyzować rzeczywistość matematyczną, trzeba ją dobrze znać. Nawet jeśli nasze teorie mają być oderwane od rzeczywistości, trzeba znać tę rzeczywistość – choćby po to. Dopiero na studiach matematycznych – jeśli ktoś na nie trafi – jest miejsce na ścisłe i nienaganne teorie aksjomatyczne, choć i z tym przesadzać tam nie należy. Mówiłem już o metodologicznej różnicy, jaką widzę pomiędzy matematyką szkoły podstawowej i średniej; taki układ matematyki ma jednak jeszcze kilka pięter. W szkole średniej jesteśmy na ... średnim.

– *No tak, lubię porównywać uprawianie nauk ścisłych do eksploracji górskich. Mount Everest nie jest podobno zbyt trudny technicznie w tym sensie, że trzy czwarte trudności bierze się z jego wysokości, rozmiarów podejść, braku tlenu i panującego zimna. Nie możemy więc uczniów zabierać na nasze Mount Everesty. Nie powinniśmy jednak ich uczyć gór ćwicząc ich zdolności wspinaczkowe wyłącznie na betonowych ścianach starych bunkrów (chociaż z braku gór w pobliżu Warszawy jeździło się kiedyś „na dęby" na Bielany, a teraz do Czosnowa na ruiny carskich fortyfikacji). Czy nie możemy uczniów prowadzić po „Tatrach", pokazując „przewieszki, nieprzebyte ściany, doliny i hale, cieniste regle, potoki szumiące i w dal wtopione Skalne Podhale"?*

– Uważam, że właśnie tak robimy, ucząc tej właśnie matematyki, którą nazywamy matematyką szkolną.

– *Dziękuję za rozmowę.*

Rozmawiał: Michał Szurek

Pochwała szkolnictwa z początków kapitalizmu

W 1981 r. Państwowy Instytut Wydawniczy wydał bardzo ciekawą książkę „Anglia i Szkocja. Przypomnienia z podróży roku 1820–1824 odbytej". Autorem książki – i podróżnikiem – był Krystyn Lach-Szyrma. Wśród wielu ciekawych opisów i obserwacji autora można też znaleźć wiele dotyczących szkolnictwa. Oto dwa ciekawe fragmenty.

(s. 185) Przy każdym kościele w Szkocji jest szkółka parafialna. W takich szkółkach oprócz czytania, pisania i rachunków uczą cokolwiek łaciny, geometrii i początków fizyki. Ostatnie byłyby zbytkiem u nas, nie są jednak w Szkocji, nawet wieśniacy potrzebują tam wyższego stopnia oświecenia.

(s. 480 i dalsze) Zastanawiający się nad wychowaniem w Anglii zwykli dzielić je na fizyczne i moralne (...) Szkolne wychowanie (w Anglii) dzieli się na elementarne i uczone. Pierwsze odbiera się w szkołach Bella lub Lancastra, a później w tak nazwanych szkołach gramatycznych (grammar school), wyższe w uniwersytetach. Zastanówmy się wprzódy nad szkołami niższymi. (...) Przez ciekawość odwiedziłem najsławniejszą taką szkołę w Londynie, która służyła na ukształcanie nauczycieli w tej metodzie i była za wzorową uważana. Leżała na Borough Road. Zostawała pod zarządem i opieką towarzystwa szkół krajowych i zagranicznych (The British and Foreign School Society), którego wpływ rozciąga się i na obce kraje. Przyjmowano do tej szkoły chłopców i dziewczęta i uczono ich w oddzielnych na jeden wzór wybudowanych salach. Sale te były podłużne, wysokie, obszerne, tak że w każdej na tysiąc uczniów było miejsca; lecz wtedy było chłopców tylko siedmiuset, a dziewcząt nieco mniej. Ławki stały we środku, można było obchodzić je naokoło, a w jednym końcu sali stało wzniesienie z drzewa na kształt galerii dla nauczyciela, skąd za jednym rzutem oka mógł wszystkich uczniów przejrzeć. Żeby w tak obszernych i wysokich salach głos się nie odbijał, porozwieszano w pewnych odległościach u sufitu zielone sukno. Po ścianach wisiały tablice do rachunków z wypisami z Biblii do czytania. W każdej ławce siadało po siedemnaścioro dzieci, nad każdą przełożony był monitor pilnujący nauk i porządku (...) Uczniowie siadają podług postępu w naukach, niżej lub wyżej, poczynający siedzą najbliżej nauczyciela. Szkoła dziewcząt zostaje pod dozorem ochmistrzyni, która jest oraz ich nauczycielką. Jeden nauczyciel i jedna ochmistrzyni przy pomocy monitorów wystarczali na tę tak liczną szkołę.

Uprościć maturę!

Wiosną 1982 roku uczniowie i nauczyciele województwa nowosądeckiego zmagali się z następującym zadaniem, poleconym przez Centrum Doskonalenia Nauczycieli jako wzorcowe przedmaturalne zadanie przygotowawcze:

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{ax^3}{bx^2+c}\right|$ oraz zbadaj ilość pierwiastków równania $f(x) = m$ w zależności od m, jeśli wiadomo, że

1. liczby $a, b, c+1$ tworzą ciąg arytmetyczny,

2. b/a jest prawdopodobieństwem wyrzucenia co najmniej raz jedynki w trzykrotnym rzucie kostką,

3. $|c|/a$ jest mimośrodem krzywej $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{p^2}+\frac{x^2}{t^2}=1$ przechodzącej przez punkty $(2, 0)$ i $(0, \sqrt{3})$.

Zadanie bardzo dobre, bo w nadzwyczaj naturalny sposób łączy kilka działów matematyki. Czemu jednak ograniczyć się do matematyki? Oto nasz projekt uniwersalnego zadania maturalnego:

Naszkicować wykres funkcji
$y = ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g+h\sin x$, jeżeli wiadomo, że

1. liczby a, g, h tworzą ciąg geometryczny,
2. b/d^2 jest prawdopodobieństwem wyrzucenia orła,
3. $c^2/1410$ jest datą bitwy pod Grunwaldem,
4. $a+e$ jest liczbą ksiąg największego poematu polskiego i jednocześnie liczbą miesięcy w roku,
5. $ac+g$ jest liczbą nóg karalucha,
6. $d-h$ to liczba symboli w prawie Ohma,
7. $2g+1$ to długość Wisły wyrażona w milach angielskich,
8. $a+b+c+d+e+f+g+h = 0$ jeżeli butter znaczy po angielsku szewc, a 1 w przeciwnym przypadku.

Łatwo, prosto, elegancko.