Jakie twierdzenia matematyczne są ważne?

rozmowa z profesorem dr Andrzejem BIAŁYNICKIM-BIRULĄ

— Panie Profesorze, w trakcie swoich studiów matematycznych wiele razy słyszałem z ust wykładowców, że „to twierdzenie jest ważne". Kryteria oceny były zwykle dla mnie niejasne, ale często były na pewno różne. Czy mógłby Pan powiedzieć nam, co rozumie Pan przez „ważne twierdzenie" i jak poznać, które jest ważne?

— Nie zawsze można od razu stwierdzić, czy twierdzenie, które właśnie pojawiło się na rynku matematycznym, na arenie współczesnej nam matematyki jest ważne czy nie. Rozstrzyga to czas. Najczęściej jednak wiadomo „od razu", czy odkryte twierdzenie jest ważne, czy też mniej ważne. Tak zresztą przeważnie jest z odkryciami i wynalazkami w każdej dziedzinie.

Waga twierdzeń matematycznych może mieć dwa źródła. Po pierwsze, znaczenie twierdzenia może wynikać stąd, że opisuje ono, wyjaśnia jakiś bardzo ciekawy i znaczący fakt, że zapełnia lukę w naszej wiedzy matematycznej. Po drugie, o randze twierdzenia może decydować jego dowód. Może on wnosić coś nowego do zasobu naszych metod matematycznych. Waga twierdzenia może oczywiście wynikać z obu tych powodów jednocześnie. Są tacy matematycy, którzy uważają, że twierdzenie jest ważne tylko wtedy, gdy w jego dowodzie została użyta jakaś nowa metoda. Są jednak i tacy matematycy (ja do nich należę), którzy uważają, że waga twierdzenia może być związana z odkryciem pewnych nowych faktów (bez wprowadzenia nowych metod). Waga twierdzenia może polegać również na tym, że zamyka ono pewną teorię, pewien etap w rozwoju matematyki. To jest jednak rzadkie. Ważne twierdzenia na ogół otwierają, a nie zamykają drogę dalej.

— Czy słynna hipoteza Weila coś kończy, czy raczej otwiera?

— Do dowodu hipotezy Weila stworzono szereg zupełnie nowych metod matematycznych ...

— Zupełnie jak do Wielkiego Twierdzenia Fermata ...

— Właśnie, dość podobnie. Z tym że Wielkie Twierdzenie Fermata samo w sobie według mnie nie przydałoby się zbyt wiele. Natomiast hipoteza Weila (już teraz: twierdzenie Grothendiecka-Deligne'a) jest twierdzeniem bardzo użytecznym, które ma i będzie zapewne mieć wiele różnych zastosowań.

— Są jeszcze twierdzenia o charakterze czysto technicznym, którymi podpieramy się właściwie tylko raz, ewentualnie w kilku typowych sytuacjach. Lemat Kuratowskiego-Zorna jest chyba taki.

— Lemat Kuratowskiego-Zorna jest przykładem twierdzenia, którym „podpieramy się" w wielu przypadkach. Obecnie jest to pewien skrót myślowy, powołanie się na ten lemat pozwala na pominięcie powtórzenia jego dowodu. Są też twierdzenia o charakterze raczej technicznym, ale o podstawowym znaczeniu dla dyscypliny, której dotyczą. Za takie można uznać np. twierdzenia Hilberta o bazie i o zerach. Taki techniczny charakter ma też wiele twierdzeń z klasyfikacji algebr Liego. Służą one głównie do rozbijania dowodów na przypadki.

— Twierdzenia „o klasyfikacji" są ważne, ale chyba nie bardzo ważne. Na przykład twierdzenie podające postać dowolnej grupy abelowej skończenie generowanej. Nie jest to przecież „bardzo ważne" twierdzenie teorii grup.

— O nie, całej teorii grup to twierdzenie oczywiście nie kończy, ale kończy ono, przynajmniej w pewnym sensie, teorię skończenie generowanych grup abelowych. Korzystając z tego twierdzenia, po części też z jego dowodu, można przedstawić daną grupę w postaci sumy prostej grup cyklicznych, co właściwie pozwala rozwiązać wszystkie problemy dotyczące tej grupy. To twierdzenie kończy, dobija, teorię skończenie generowanych grup abelowych.

— W teorii grup bardzo ważny jest czy raczej był, rozwiązany niedawno problem: wyliczyć wszystkie grupy proste.

— To jest typowy przykład zagadnienia, które nadawało ton, stymulowało rozwój pewnej gałęzi matematyki, w tym przypadku teorii grup. Rozwiązanie tego problemu pozwoli na dowodzenie wielu twierdzeń teorii grup przez rozpatrywanie przypadków, podobnie jak to miało miejsce w teorii grup Liego, o czym przed chwilą mówiłem. Często tak bywa, że jakiś konkretny problem stymuluje rozwój danej dziedziny matematyki. W przypadku teorii grup — był to problem klasyfikacji grup skończonych — dla tej teorii problem centralny. Czasami te najbardziej stymulujące problemy nie zajmują tak centralnej pozycji, a mimo to przyciągają uwagę wielu matematyków i przyczyniają się do rozwoju różnych dziedzin matematyki, do takich problemów zaliczyłbym Wielkie Twierdzenie Fermata.

— Mówił Pan o kryteriach ważności twierdzeń. Sądzę, że jest jeszcze co najmniej jedno takie kryterium: twierdzenie może być ważne ze względów „światopoglądowych". Takie jest chyba twierdzenie Gödla ...

— Tak, to jest twierdzenie tego typu. Ale jest ono również bardzo ważne ze względu na metody, które Gödel wprowadził przy obu swoich głównych twierdzeniach: o zupełności i o nierozstrzygalności. Dowody ich były potem wykorzystywane i w innych sytuacjach. To jest niewątpliwie kamień milowy w rozwoju logiki, również jeśli chodzi o metody.

— Znaczenie twierdzenia matematycznego wiąże się także z kwestią ważności gałęzi matematyki, do której należy. Ta zaś kwestia jest moim zdaniem silnie sprzężona z naszą wiarą (lub: niewiarą) w coś takiego jak „rzeczywistość matematyczna" — w to, że te przestrzenie, które badamy w matematyce, istnieją „naprawdę" i że kierunek rozwoju matematyki jako całość jest mniej więcej wyznaczony. Czy rzeczywiście można taki kierunek zauważyć? Jest na przykład pogląd, że cała matematyka się algebraizuje ...

Hipoteza Weila (zwyczajowo nazywana wciąż hipotezą, choć jest to już twierdzenie) wygląda dość niepozornie w stosunku do swego znaczenia. Opisuje ona liczbę rozwiązań pewnych równań algebraicznych nad ciałami skończonymi. Używana jest jednak w silny sposób w wielu działach matematyki, w tym w teorii liczb i geometrii algebraicznej. Nie sposób w kilku zdaniach omówić całego bogactwa jej zastosowań.

Lematowi Kuratowskiego-Zorna poświęcił artykuł w *Delcie* Zbigniew Sawoń (nr 9/1982). Twierdzenie to orzeka o istnieniu — w pewnych przypadkach — elementu maksymalnego ze względu na pewną własność. Dokładne sformułowanie brzmi: jeżeli $\prec$ jest częściowym porządkiem w zbiorze X takim, że każdy podzbiór liniowo uporządkowany ma ograniczenie górne w X, to w zbiorze X jest przynajmniej jeden element maksymalny ze względu na $\prec$, tj. taki element x, że nie ma różnego od x elementu y takiego, że $x \prec y$. Typowym zastosowaniem tego twierdzenia jest wykorzystanie go do dowodu, że każda przestrzeń liniowa ma bazę. Dokładniej omawia to wspomniany artykuł Z. Sawonia.

Twierdzenia Hilberta o bazie i o zerach dotyczą układów równań algebraicznych. Pierwsze z nich — w nieco uproszczonej wersji — mówi, że z każdego układu równań wielomianowych

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

o współczynnikach z dowolnego ciała da się wybrać układ skończony i to tak, by nie zmienić zbioru rozwiązań układu. Twierdzenie o zerach (często używana jest niemiecka nazwa Nullstellensatz) dotyczy układów równań nad ciałem liczb zespolonych (ogólniej: nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym). Jedno ze sformułowań stwierdza, że układ równań postaci $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, gdzie $a_1, \ldots, a_n$ są stałymi, jest jedynym układem równań opisującym pojedynczy punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ n-wymiarowej przestrzeni zespolonej C^n. Zwróćmy uwagę, że układ $x_1^2 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ nie opisuje punktu „pojedynczego", tylko „podwójny", bo wielomian x_1^2 ma w zerze pierwiastek podwójny. Nie opisuje także punktu równanie $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, mające nad ciałem liczb zespolonych wiele rozwiązań.

Każda grupa abelowa o skończonej liczbie generatorów jest sumą prostą grup cyklicznych.

— Co do „rzeczywistości matematycznej" to na pewno większość z nas, większość matematyków uważa, że ich działalność jest badaniem jakiejś tam rzeczywistości, chociaż są również i tacy, którzy matematykę traktują aksjomatycznie. Dla nich dowodzenie twierdzeń jest po prostu pewną grą — niczym więcej — gra ta polega na wyciąganiu wniosków z aksjomatów i twierdzeń już udowodnionych, nie jest opisem żadnej rzeczywistości.

— *Matematyka jako gałąź logiki?*

— Tak, jako system dedukcyjny. Ale tacy matematycy są w zdecydowanej mniejszości. Czy istnieje jakiś kierunek rozwoju matematyki? Na pewno tak, ale jest on raczej związany z tym, że pewne gałęzie matematyki w niektórych momentach wkraczają na arenę, są badane szczególnie intensywnie, a po pewnym czasie przechodzą albo w zapomnienie, albo do ...

— *... elementarnego wykształcenia.*

— Może raczej do wyższego, w każdym razie do zasobów wiedzy matematycznej.

— *Do klasyki?*

— Tak, bardzo często po pewnym czasie następuje ich renesans: okazuje się, że powstałe w międzyczasie metody mogą być zastosowane do zapomnianej już problematyki, zapoczątkowując jej ponowny rozkwit. Dobrym przykładem jest teoria niezmienników, stworzona w XIX wieku, potem trochę zapomniana, a ostatnio znowu odżywająca. David Hilbert powiedział „Gdy byłem młody, każdy dobry matematyk zajmował się choć trochę teorią niezmienników, dzisiaj żaden dobry matematyk się nią nie zajmuje".

— *To może odrodzi się i polska szkoła matematyczna?*

— Odnowa zapomnianych dziedzin dotyczyć może raczej dziedzin bardziej związanych z „konkretami" matematycznymi, a nie z podawaniem ogólnych prawd. Polska szkoła matematyczna była związana z takimi dziedzinami matematyki jak topologia, podstawy, analiza funkcjonalna w ogólnym sensie, algebra ogólna. Ich celem było stworzenie pewnego języka i ogólnych metod. To już znalazło się w skarbcu matematyki. Wyczerpała się tym samym siła napędowa rozwoju tych dyscyplin. Wspominał Pan jeszcze o „algebraizacji" matematyki ...

— *Tak, miałem na myśli teorię kategorii, której używa się w prawie całej matematyce.*

— „Algebraizacja" nie jest tu dobrym terminem. Każda młoda dyscyplina matematyki na początku operuje niezbyt dobrze sprecyzowanymi pojęciami i metodami (jeśli nawet wszystko się zgadza z punktu widzenia logiki). Po pewnym czasie to bardzo utrudnia rozwój. Nastaje potrzeba formalizacji, jak gdyby skodyfikowania osiągnięć. To łączy się na ogół z algebraizacją. Ale nie obawiałbym się, że matematyce grozi przerost wpływów formalnej algebry. Jakoś tak jednak jest, że właśnie korzystając z metod formalnych można często dobrze usystematyzować i wyjaśnić uzyskane rezultaty. Powstanie (wyodrębnienie się z topologii) i rozwój topologii algebraicznej może być bardzo dobrym tego przykładem. Warto jednak zdać sobie sprawę z tego, że zagadnienia, nad którymi pracują matematycy, stają się coraz trudniejsze. Nie można im sprostać, nie mając dobrze opanowanego warsztatu i to również od strony formalnej. Minęły te czasy, kiedy genialny samouk mógł rozwiązać poważny problem. Dziś niezbędne w pracy jest bardzo dobre opanowanie tych sformalizowanych metod, które są wynikiem pracy całych pokoleń matematyków.

— *Dawniej można było coś odkryć w teorii liczb nie będąc profesjonalistą.*

— Jeżeli jakaś dyscyplina matematyczna właśnie się tworzy, to może się zdarzyć, że znane metody „nie chwytają" i trzeba po prostu stworzyć nowe. I jeżeli ktoś ma tzw. „świeżą głowę", może bez przygotowania zdziałać coś twórczego i ważnego. Ale w dziedzinach klasycznych szanse genialnych samouków są znikome. Ten mój (i nie tylko mój) pogląd wcale nie kłóci się z tym, że według mnie w rozwoju matematyki bardzo dużą rolę odgrywają indywidualności. Ale to są matematycy, którzy nie tylko mają genialne pomysły, ale też doskonale opanowany warsztat matematyczny, są bardzo dobrze wykształconymi matematykami, a nie samoukami. Wynikiem pracy takich uczonych może być nawet wytyczenie rozwoju jakiejś dyscypliny (czasami, choć rzadko: kilku dyscyplin) nawet na dziesięciolecia. Typowym przykładem jest działalność Alexandra Grothendiecka w geometrii algebraicznej. Bez niego byłaby ona zapewne zupełnie inna. No, bez niego i Jean-Pierre Serre'a.

— *Grothendieck ma teraz około 50 lat?*

— Tak, ponad 50.

— *O ile pamiętam, medal Fieldsa dostał na Kongresie w Moskwie w 1966 roku?*

— Tak, ale te podstawowe jego pomysły pochodzą z 1958 roku. W tym to roku w ciągu omalże jednego miesiąca Grothendieck doszedł do swoich głównych wyników. Była to prawdziwa eksplozja. Potem dobrych parę lat zabrało spisanie tego wszystkiego na papierze.

— *Bardzo podobna historia zdarzyła się 300 lat temu, kiedy to w Oxfordzie wybuchła zaraza i młody Newton wrócił do domu na wieś. W ciągu krótkiego pobytu na wsi doszedł do większości swoich odkryć, dzięki którym zyskał potem nieśmiertelną sławę. Historia lubi się powtarzać. Czy działalność Grothendiecka też jest niedoceniana lub ostro atakowana przez część współczesnych?*

— Nie, świat współczesny jest pod tym względem bardziej sprawiedliwy, zresztą jak można atakować prawdziwe twierdzenia. Nie mówię tu o marginesach społeczności matematycznej, tam mogą się pojawić nieprzychylne gesty. Uogólnienia, których dokonał Grothendieck, są tak znaczne, że niekiedy trzeba osobnego wykładu, by wytłumaczyć związek między twierdzeniem

Wielkie Twierdzenie Fermata — nieudowodnione jeszcze przypuszczenie, że równanie $x^n + y^n = z^n$ (gdzie n jest liczbą naturalną większą od 2) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z. Piotr Fermat twierdził w 1660 r., że znalazł zadziwiający dowód tego faktu. Nie zostawił jednak żadnych szczegółów. O Wielkim Twierdzeniu Fermata i roli, jaką odegrało ono w rozwoju algebry, pisaliśmy w nr 5/1981.

Twierdzenie Gödla o zupełności orzeka, że teoria jest niesprzeczna (tzn. nie można z aksjomatów tej teorii wywnioskować jednocześnie jakiegoś zdania i jego zaprzeczenia) wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona model (tzn. gdy istnieje pewna „rzeczywistość" matematyczna, w której spełnione są aksjomaty teorii po odpowiedniej interpretacji symboli występujących w jej języku).

Twierdzenie Gödla o nierozstrzygalności mówi, że dla każdej dostatecznie bogatej teorii T (mówiąc dokładniej: dla teorii zawierającej zwykłą arytmetykę liczb naturalnych) istnieje takie zdanie w języku tej teorii, że ani ono, ani jego zaprzeczenie nie wynika z aksjomatów teorii T.

Topologia algebraiczna polega — w największym przybliżeniu — na badaniu obiektów geometrycznych (precyzyjniej: przestrzeni topologicznych) metodami algebry. Przykładowo, z każdym takim „obiektem geometrycznym" (np. wielościanem, kulą, sferą, torusem itd.) można związać wiele grup, opisujących w dość zadowalający sposób wiele ich geometrycznych własności.

Rozwiązanie zadania M 320

Równanie nasze ma pierwiastki wymierne wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = b^2 - 4ac$ jest kwadratem liczby całkowitej r. Ponieważ b jest nieparzyste, więc i r musi być nieparzyste: $r = 2t+1$, $r^2 = 8\frac{t(t+1)}{2} + 1$. Oznaczając jednak $a = 2n+1$, $b = 2p+1$, $c = 2q+1$ mamy $\Delta = (2p+1)^2 - 4(2n+1) \times (2q+1) = 8\left(\frac{p(p+1)}{2} - 2nq - n - q\right) + 5$, tj. $\Delta = 8N + 5$, gdzie N jest całkowite. Sprzeczność.

a jego sformułowaniem w wersji Grothendiecka. Przy czym uogólnienia Grothendiecka są zawsze bardzo głębokie.

— *Kiedy dzieci w szkołach będą uczyć się o Grothendiecku?*

Kiedyś, jako student myślałem, że ludzkość osiągnie taki poziom, że w kioskach zamiast, no powiedzmy „Boksu" czy „Przeglądu Sportowego" ludzie będą kupować „Fundamenta Mathematicae", a w szkołach dzieci będą się uczyć „poważnej" matematyki. Ale teraz już tak nie myślę ...

— *Dziękuję za rozmowę.*

Rozmawiał *Michał SZUREK*

Lokalna Supergromada

Mgr Krzysztof GÓRSKI

Jednym z najważniejszych przedsięwzięć dzisiejszej astronomii jest realizowany przez kilka grup naukowych w Stanach Zjednoczonych i jedną w Związku Radzieckim systematyczny program badań największych rozpoznawalnych dotychczas skupisk materii we Wszechświecie — tzw. supergromad. Badania te mają kapitalne wręcz znaczenie dla kosmologii. W pewnym sensie centralnym jej problemem jest znalezienie zadowalającej odpowiedzi na pytanie: „Jak powstały galaktyki?". Obecnie nikt nie jest jeszcze w stanie odpowiedzieć na nie jednoznacznie. Teoria powstawania galaktyk rozwijana jest obecnie przez zwolenników jej dwóch rozłącznych, dopełniających się wariantów. Aby w ogóle we Wszechświecie powstały jakiekolwiek obiekty, konieczne jest istnienie pierwotnych niejednorodności. Na razie nie wiadomo jeszcze, skąd się owe niejednorodności wzięły i jak wyglądały, więc zakłada się a priori ich istnienie w najprostszej z możliwych postaci. Tu właśnie różnią się poglądy kosmologów-teoretyków. Jedni zakładają, że w „cieczy" wypełniającej Wszechświat, złożonej z materii i promieniowania, silnie ze sobą sprzężonych w dostatecznie wczesnych epokach, zaburzona była tylko gęstość składowej materialnej. Zaburzenia takie nazywają się izotermicznymi. Drudzy — przeciwnie — twierdzą, że zaburzenia tzw. adiabatyczne, istniały w „cieczy" traktowanej jako całość.

Każde realistyczne zaburzenie, o których dalej będzie mowa, jest kombinacją (superpozycją) zaburzeń, których modele rozwijane są przez obie grupy.

Dalsza procedura to zbadanie, jak pierwotne zaburzenia ewoluowały w trakcie rozszerzania się i stygnięcia całego Wszechświata, w szczególności — co działo się w krytycznej epoce rekombinacji materii, gdy składowa promienista i materialna przestały ze sobą silnie oddziaływać i ciśnienie we Wszechświecie spadło praktycznie do zera. Okazuje się, że zaburzenia izotermiczne są „wmrożone" w promieniowanie i do momentu rekombinacji utrzymują się na pierwotnym poziomie. Zaburzenia adiabatyczne przechodzą w tym czasie bardzo interesującą ewolucję polegającą na tym, że epoka rekombinacji działa na nie jak filtr tłumiący zaburzenia o małych masach, mniejszych niż około (w zależności od wariantu teorii) 10^{13}—10^{15} $M_\odot$ — mas Słońca (co odpowiada w przybliżeniu masie gromady galaktyk).
Po rekombinacji materii zaburzenia jej gęstości zaczynają narastać i kolejnym interesującym momentem w ich ewolucji jest okres, w którym ich gęstość staje się znacząco większa (powiedzmy kilkakrotnie) niż gęstość otaczającego je tła. Zaczyna się wówczas grawitacyjny kolaps takiego protoobiektu. Ponieważ zakłada się, że pierwotne zaburzenia były tym mniejsze, im większa była ich masa, otrzymuje się dwa następujące scenariusze powstania obecnej struktury Wszechświata.

W pierwszym, zaproponowanym pod koniec lat sześćdziesiątych przez R. Dicke'go i P. J. E. Peebles'a z Princeton (USA), pierwotne zaburzenia są izotermiczne i wobec tego pierwsze powstające we Wszechświecie obiekty mają małą masę, konkretnie ok. 10^6 $M_\odot$ (co odpowiada mniej więcej masie gromady kulistej gwiazd). Następnie w „gazie" złożonym z tych obiektów zachodzi kolaps mniejszych początkowo zaburzeń o większej masie — odpowiadających, powiedzmy, galaktykom. „Gaz" potem tworzą galaktyki i powstają ich grupy i gromady, itd. Schemat ten nosi nazwę ciągłego grawitacyjnego grupowania.

Ten „gaz" to ośrodek złożony z oddziałujących ze sobą tylko grawitacyjnie wielu punktów materialnych (mogą to być gwiazdy, gromady kuliste, galaktyki itd).

Drugi scenariusz, zaproponowany na początku lat siedemdziesiątych przez J. Zeldowicza z Moskwy i rozwijany później przez jego grupę, opiera się na założeniu, że pierwotne zaburzenia były adiabatyczne. Jak powiedziano wyżej, istnieje wtedy pewna charakterystyczna, dość duża masa, poniżej której zaburzenia zostały w czasie ewolucji stłumione.

Przedstawiciele tej grupy twierdzą, że kolaps tych protoobiektów zachodził anizotropowo i doprowadził do powstania olbrzymich, spłaszczonych struktur (nazywanych przez Rosjan blinami, zaś przez Anglosasów — pancakes) porozdzielanych wielkimi pustymi obszarami przestrzeni (z grubsza można się tu dopatrywać analogii ze strukturą plastra miodu). Dopiero w następnym etapie miała się rozpocząć fragmentacja blinów i powstawanie galaktyk.
Tak, w bardzo uproszczonym zarysie, przedstawiają się idee leżące u podstaw dwóch konkurujących poglądów na kwestię powstania obecnej struktury Wszechświata. Oczywiście tylko obserwacje mogą te teorie zweryfikować. Wydaje się, że po około pięćdziesięciu latach od narodzin kosmologii obserwacyjnej doszliśmy do okresu, w którym zdobycze astronomii instrumentalnej umożliwiają jej intensywny rozwój w sensie ilości i jakości danych obserwacyjnych. Po wielu latach badań rozkładu przestrzennego galaktyk w oparciu o znane ich położenia na Niebie i dedukowane z jasności odległości przyszedł czas żmudnych, ale płodnych bezpośrednich analiz odległości poszczególnych galaktyk w dużych obszarach Nieba. Informacje o odległości uzyskuje się badając przesunięcie linii absorpcyjnych w widmach galaktyk w kierunku niższych częstości — tzw. redshift. Odzwierciedla ono rozbieganie się galaktyk odkryte przez Hubble'a w latach dwudziestych. Tzw. prawo Hubble'a wiąże odległość od nas badanej galaktyki z jej prędkością ucieczki, wyznaczoną tak jak w klasycznym efekcie Dopplera, z przesunięcia linii widmowych.
W obecnym stanie rozwoju techniki obserwacyjnej uzyskanie widma jednej galaktyki zajmuje ok. pół godziny pracy teleskopu.