Rzuć monetę, rzuć monetę

Dr Edward STACHOWSKI

W długiej serii rzutów monetą liczba orłów jest — z dużym prawdopodobieństwem — bliska liczbie reszek. Jakiego rzędu jest ta bliskość? Czy przy wydłużaniu serii różnica $R - O$ (liczba reszek minus liczba orłów) zmierza do zera, czy może rośnie nieograniczenie?

Wiadomo (prawo wielkich liczb Bernoulliego), że ciągi $\frac{O_n}{n}$ (O_n — liczba orłów w n rzutach) i $\frac{R_n}{n}$ dążą do $\frac{1}{2}$. Odejmując, widzimy że $\frac{O_n - R_n}{n} \to 0$, ale nie daje to żadnych specjalnych informacji o granicy $\lim(O_n - R_n)$. Co znaczy, że $\frac{O_n}{n}$ „dąży do $\frac{1}{2}$"? Jest to tylko (to właśnie orzeka prawo wielkich liczb) zbieżność „według prawdopodobieństwa". Precyzując ten termin powiemy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ „dąży" do liczby a, (co będziemy oznaczali przez $X_n \to a$), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

(1) $$\lim P\{|X_n - a| > \varepsilon\} = 0.$$

Tego typu zbieżność w teorii prawdopodobieństwa nazywamy właśnie zbieżnością stochastyczną lub zbieżnością według prawdopodobieństwa. Intuicyjnie znaczy ona, że prawdopodobieństwa odchyleń większych od ε są dla dużych n dowolnie małe.

W naszym przypadku

(2) $$\frac{O_n}{n} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{R_n}{n} \to \frac{1}{2}$$

oraz, co łatwo z tego wynika,

$$\frac{O_n}{R_n} \to 1.$$

Ciekawe jest następujące pytanie: co można powiedzieć o ciągu różnic między liczbą orłów i reszek, tzn. o ciągu $\{O_n - R_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub jeżeli ktoś woli $\{R_n - O_n\}_{n=1}^{\infty}$. Okazuje się, że ciągi te są nieograniczone w tym samym sensie, w którym powyższe ciągi „dążyły" do 1/2 lub 1. Dokładniej, pokażemy że dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego k naturalnego

$$P\{|O_n - R_n| \leqslant k\} < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych n. Znaczy to, że dla dostatecznie dużych n prawdopodobieństwo że $|O_n - R_n|$ nie przekroczy liczby k jest dowolnie małe lub inaczej, prawdopodobieństwo że $|O_n - R_n|$ przekroczy k jest dowolnie bliskie 1.

Przejdźmy do dowodu. Pokażemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dowolnego k istnieje liczba N taka, że dla wszystkich $n > N$

$$P\{|O_{2n} - R_{2n}| \leqslant 2k\} < \varepsilon$$

(zastąpiliśmy n przez $2n$ oraz k przez $2k$ w celu uproszczenia rachunków).

Mamy $|O_{2n} - R_{2n}| \leqslant 2k \Leftrightarrow |O_{2n} - n| \leqslant k$,

stąd

$$\begin{aligned} P\{|O_{2n} - R_{2n}| \leqslant 2k\} &= P\{|O_{2n} - n| \leqslant k\} = P\{|O_{2n} = n-k \vee \\ &\vee O_{2n} = n-k+1 \vee \ldots \vee O_{2n} = n+k-1 \vee O_{2n} = n+k\} = \\ &= P\{O_{2n} = n-k\} + P\{O_{2n} = n-k+1\} + \ldots + \\ &+ P\{O_{2n} = n+k-1\} + P\{O_{2n} = n+k\}. \end{aligned}$$

Największym spośród $2k+1$ składników jest $P\{O_{2n} = n\}$ (najbardziej prawdopodobną liczbą orłów w $2n$ rzutach monetą jest n). Mamy więc

$$P\{|O_{2n} - R_{2n}| \leqslant 2k\} \leqslant (2k+1)\, P\{O_{2n} = n\}$$

ale

$$P\{O_{2n} = n\} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{n!n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Korzystając ze wzoru Stirlinga (zob. *Delta* 7/1981)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$$

otrzymujemy

$$P\{O_{2n} = n\} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\, e^{-2n}(2n)^{2n}}{2\pi n e^{-2n} n^{2n} n^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

a stąd

$$P\{|O_{2n} - R_{2n}| \leqslant 2k\} \leqslant \frac{2k+1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Niech $\varepsilon > 0$ i k będą dowolnymi ustalonymi liczbami. Ponieważ ciąg $\left\{\frac{2k+1}{\sqrt{\pi n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zera, to istnieje takie N, że dla $n > N\left(\geqslant \frac{(2k+1)^2}{\pi\varepsilon^2}\right)$ mamy $\frac{2k+1}{\sqrt{\pi n}} < \varepsilon$ no i już. Przykładowo dla $k = 250$, $\varepsilon = 0{,}001$ mamy $N > 79\,896\,100\,000$ (przy 160 miliardach rzutów różnica między liczbą orłów a reszek przekroczy 500 z prawdopodobieństwem 99,9%).

Wystarczy więc rzucać „dowolnie długo", aby nadwyżki jednego wyniku nad drugim stały się dowolnie duże z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności. Fakt ten na ogół nie jest znany, „zdrowy rozsądek" podsuwa bowiem myśl, że liczby wyników poszczególnych rodzajów wykazują tendencję do wyrównywania się w miarę coraz dłuższych serii prób.

Rozważania dotyczące rzutów monetą można uogólnić na dowolny schemat Bernoulliego. Jeżeli przez S_n oznaczymy liczbę sukcesów w n próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p, to prawo wielkich liczb Bernoulliego orzeka, że

$$\frac{S_n}{n} \to p.$$

Wartością oczekiwaną liczby sukcesów w n próbach Bernoulliego jest np. W sposób analogiczny jak poprzednio można wykazać, że wyrazy ciągu $\{|S_n - np|\}_{n=1}^{\infty}$ będą większe od dowolnej liczby z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności dla dostatecznie dużych n. Przykładowo, jeżeli rozpatrujemy rzuty kostką i S_n oznacza liczbę „szóstek" w n rzutach, to

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{6},$$

a ciąg $\left\{\left|S_n - \frac{n}{6}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$ jest nieograniczony.

Dokładniej, dla zmiennej losowej S o rozkładzie Bernoulliego mamy z prawdopodobieństwem 1:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n}} = 1,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n}} = -1.$$