Klub 44

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Zadania nr **43, 44, 45**

Termin nadsyłania rozwiązań: 31.03.1983 r.

43. Dany jest czworościan $ABCD$. Dla dowolnej liczby naturalnej n oznaczmy przez A_n, B_n, C_n punkty leżące odpowiednio na krawędziach AD, BD, CD takie, że $A_nD=\frac{1}{n}AD$, $B_nD=\frac{1}{n}BD$, $C_nD=\frac{1}{n}CD$. Niech P_n będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkty A_n, B_{n+1}, C_{n+2}. Udowodnić, że istnieje prosta zawarta we wszystkich płaszczyznach P_n $(n=1,2,\ldots)$.

44. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{500}.$$

45. Liczby rzeczywiste $x_1,\ldots,x_n$ spełniają układ równań

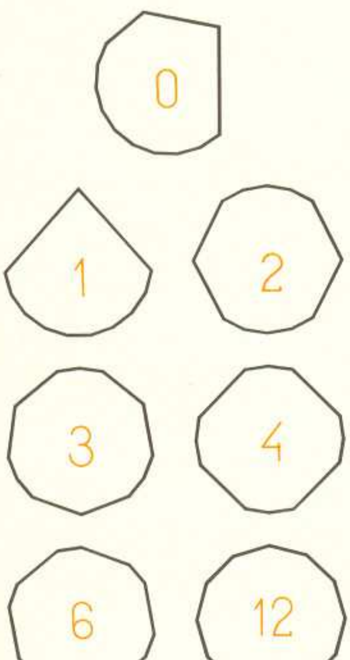
$$\cos x_1=x_2,\ \cos x_2=x_3,\ \ldots,\ \cos x_{n-1}=x_n,\ \cos x_n=x_1.$$

Czy stąd już wynika, że $x_1=x_2=\ldots=x_n$?

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 9/1982

31. Niech $s_i=a_1+\ldots+a_i$. Założenia dowodzonego twierdzenia, napisane w terminach ciągu $\{s_i\}$, przybierają postać warunków: $s_{i+k}=s_i+s_k$ (dla wszystkich i), $s_k\geqslant 0$. Teza orzeka istnienie wskaźnika m takiego, że $s_n\geqslant s_m$ (dla $n>m$). Otóż wystarczy za m przyjąć numer najmniejszej liczby w zbiorze $\{s_1,\ldots,s_k\}$. Jeśli bowiem n daje przy dzieleniu przez k iloraz q i resztę r $(1\leqslant r\leqslant k)$, to $s_n=s_{r+qk}=s_r+qs_k\geqslant s_r\geqslant s_m$.



32. Rysunki prezentują dwunastokąty mające 0, 1, 2, 3, 4, 6 i 12 osi symetrii, a więc 0, 1 i wszystkie dzielniki liczby 12. Ponieważ obrazem wierzchołka względem dowolnej osi symetrii jest wierzchołek, więc osi nie może być więcej niż 12. Wszystkie osie symetrii (dowolnego) wielokąta przecinają się w jednym punkcie i (ponieważ obrazem osi symetrii względem osi symetrii jest też oś symetrii) dzielą płaszczyznę na jednakowe kąty. Jeśli osi jest $n>1$, kąt ten wynosi π/n. Zatem wykonując symetrie względem dwóch sąsiednich osi otrzymujemy obrót o kąt $2\pi/n$ o środku w punkcie przecięcia osi, który zachowuje wielokąt. Obierzmy dowolny wierzchołek i obróćmy go o $2\pi/n$, $2\cdot 2\pi/n$, $\ldots$, $(n-1)\,2\pi/n$. Otrzymamy w ten sposób (wraz z obranym) n wierzchołków. Jeśli są jeszcze nie „użyte” wierzchołki, to obieramy jeden z nich i powtarzamy operację itd ... Po wyczerpaniu wierzchołków będzie ich $mn=12$, gdzie m jest liczbą powtórzeń operacji. Ostatecznie $n=0$, lub $n\mid 12$.

33. Czynnikami mnożenia są liczby czterocyfrowe m i n. Druga i trzecia cyfra liczby n to 0 i 7. Pierwszą i czwartą cyfrę tej liczby oznaczymy przez x i y. Z zapisu działania wynika, że $10^4\leqslant ym<10^5$, $10^3\leqslant 7m<10^4$, $10^3\leqslant xm<10^4$, $10^7\leqslant mn$, skąd dostajemy nierówności $x<y$ oraz $n\geqslant m^{-1}10^7=7(7m)^{-1}10^7>7\cdot 10^3$, tak że $x\geqslant 7$. Z założenia $x\neq 7$. Zatem $x=8$, $y=9$, $n=8079$, $m\geqslant n^{-1}10^7>1237$, a ponieważ $xm=8m<10^4$, więc $m<1250$. Liczby m, xm, $7m$, ym, mn piszą się bez użycia cyfry 7, wobec czego ostatnią cyfrą liczby m nie może być 1, 3, 7. Dla $m\in\langle 1244, 1249\rangle$ drugą cyfrą liczby $7m$ jest siódemka. Pozostają cztery możliwe wartości m: 1238, 1239, 1240, 1242. Bezpośrednim sprawdzeniem przekonujemy się, że tylko $m=1238$ spełnia postawione warunki.