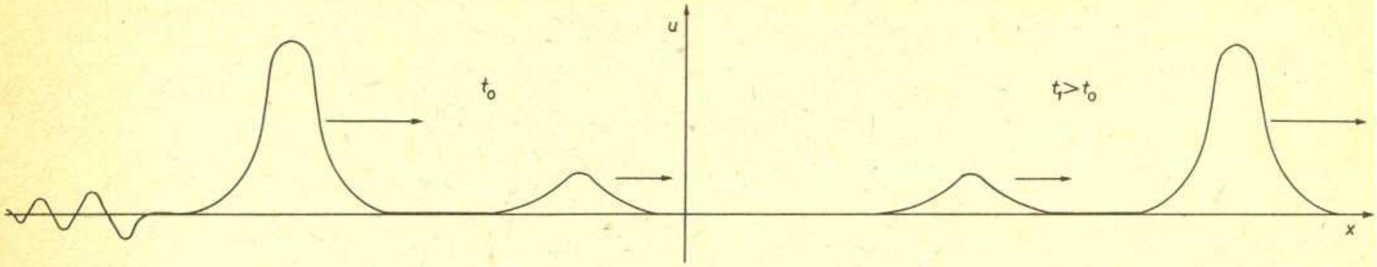
w punkcie x jest ich sumą i wynosi $-\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - u\frac{\partial u}{\partial x}$. Jest ona równa prędkości wzrostu wskutek przesuwania się fali, czyli wynosi $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x-vt) = -v\frac{\partial u}{\partial x}$, gdzie v oznacza prędkość solitonu.



Rys. 9

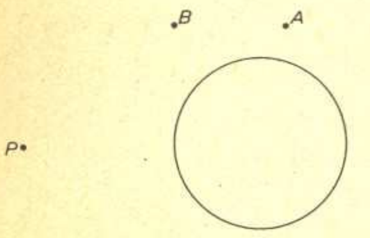
Solitony odgrywają równie uniwersalną rolę w opisie ewolucji czasowej rozwiązań równania KdV, jak fala Burgersa w opisie rozwiązań równania Burgersa. Można wykazać, że dowolne zaburzenie początkowe spełniające warunki $u_0(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ oraz $u_0(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ rozpada się (rys. 9) na pewną liczbę solitonów oraz oscylujący ogon, którego amplituda zanika nie wolniej niż $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Po dostatecznie długim czasie pozostają więc tylko solitony poruszające się na prawo ze stałą prędkością proporcjonalną do amplitudy.

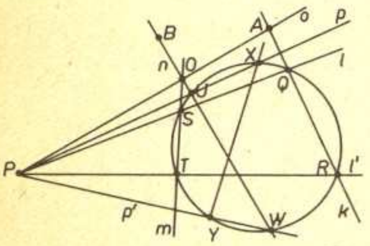
W trakcie ewolucji większe solitony doganiają mniejsze, przez moment tworzą z nimi wspólną paczkę falową, a następnie odsuwają się już z prawej strony od solitonu mniejszego. W rezultacie solitony ustawiają się w kolejności wzrastających amplitud. Potem następuje już tylko ich wzajemne oddalanie się od siebie na skutek różnic prędkości.

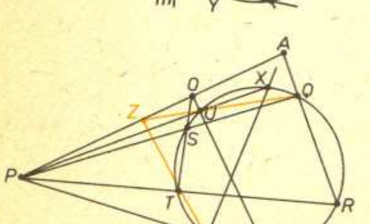
Rozpatrywane przez nas równania: KdV i Burgersa odgrywają szczególnie ważną rolę w teorii fal nieliniowych. Przyczyna leży w tym, że ścisłe równania hydrodynamiki i aerodynamiki są zbyt skomplikowane, żebyśmy mogli znaleźć ich pełne rozwiązania i trzeba się uciekać do metod przybliżonych.

Uwzględnienie najważniejszych poprawek do równania (2) wynikających z dyspersji i dyssypacji na ogół prowadzi do równania KdV lub Burgersa. Inną, niezwykle ważną cechą tych równań jest możliwość wyznaczenia (pomimo nieliniowości) rozwiązań ogólnych, co stwarza możliwość daleko głębszego wniknięcia w naturę fal nieliniowych niż pozwalają na to elementarne rozważania tego artykułu.

Już umiemy







W numerze 1/1982 rozpoczęliśmy serię *Zadań, których nie umiemy rozwiązać* następującym:

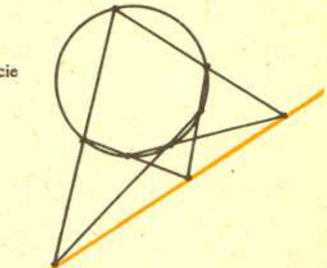
Dany jest okrąg i trzy punkty A, B, P. Narysować proste przez A i B wyznaczające na okręgu takie cięciwy UW i XY, żeby proste UX i WY przecinały się w punkcie P.

Istotnie nie umieliśmy rozwiązać tego zadania, a dziś, dzięki naszemu Czytelnikowi, Karolowi Kamińskiemu (uczniowi V klasy TM w Piotrkowie Trybunalskim), już umiemy. Nadesłał nam bowiem następujące rozwiązanie (używał tylko linijki!):

Przez punkt A kreślimy dowolną sieczną k uzyskując punkty Q i R i dalej, jak na rysunku, znajdujemy kolejno proste i punkty l, l', S, T, m, o, O, n, U, W, p, p', X i Y. Rozwiązanie to jest dobre, bardzo za nie dziękujemy.

Pozostałym Czytelnikom dajemy teraz szansę — nie czytajcie dalej, sami wykażcie poprawność rozwiązania.

Sposób dowodu, który tu proponujemy, opiera się na twierdzeniu Pascala należącym do geometrii rzutowej i mówiącym co następuje: Przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w stożkową (a więc nie tylko okrąg, ale również elipsę, parabolę bądź hiperbolę) przecinają się na jednej prostej.



Ze względu na rzutowość tego twierdzenia (ostatnim razem o geometrii rzutowej pisaliśmy w *Delcie* 5/1982) w przypadku euklidesowym mogą oczywiście mieć miejsce trzy możliwości: pierwsza — opisana w twierdzeniu (jeśli wszystkie punkty przecięcia istnieją), druga — gdy istnieją tylko dwa, prosta przez nie przechodząca jest równoległa do nieprzecinających się przeciwległych boków sześciokąta, trzecia — gdy wszystkie pary boków przeciwległych złożone są z prostych równoległych. Wykorzystamy to twierdzenie do dowodu, że prosta XY przechodzi przez punkt A. W sześciokącie $QSTYWU$ boki przeciwległe przecinają się w punktach P, O, a więc i trzecia para boków przeciwległych musi się przeciąć w punkcie Z leżącym na prostej o. W sześciokącie $XUQRTY$ dwa przecięcia to P i Z, a więc i trzecia para (QR i XY) musi się przeciąć na prostej o, a więc w punkcie A. Konstrukcja p. Karola Kamińskiego jest więc poprawna i rozwiązuje także zadanie dla wszystkich stożkowych. Udowodnienie jego stwierdzenia, że o ile prosta n nie będzie przecinała okręgu w dwóch punktach, to dla takiego okręgu i takich punktów A, B, P rozwiązanie nie istnieje, pozostawiamy Czytelnikom.