Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu ligi zadaniowej

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkic rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania, (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 4/1982

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	-38,45pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	-30,00pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	-23,48pkt
Jacek Uryga	- Bytom	-22,86pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	-18,16pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	-17,27pkt

Współczynniki trudności zadań 22, 23, 24:
1,99 2,53 2,81

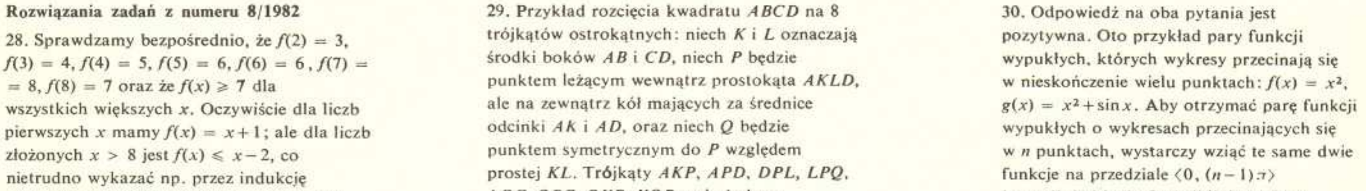
Zadania nr 40, 41, 42

Termin nadsyłania rozwiązań:

40. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spełniają warunki: $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $a_n > 0$. Udowodnić, że wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ leżą w przedziale $\langle -1,0\rangle$. Co można powiedzieć o pierwiastkach zespolonych?

41. Dane są trzy okręgi współśrodkowe o promieniach 1, $\sqrt{7}$, 4. Obliczyć największe możliwe pole trójkąta mającego po jednym wierzchołku na każdym z tych okręgów.

42. Na każdym polu szachownicy (8×8) stoi pionek. Zdejmujemy pionki z szachownicy trójkami: w jednym ruchu można zdjąć trzy pionki stojące na trzech kolejnych polach w jednym rzędzie poziomym lub pionowym. Przypuśćmy, że udało się wykonać 21 ruchów; pozostał więc jeden pionek. Czy można określić jego położenie?



Rozwiązania zadań z numeru 8/1982

28. Sprawdzamy bezpośrednio, że $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=5$, $f(5)=6$, $f(6)=6$, $f(7)=8$, $f(8)=7$ oraz że $f(x)\geqslant 7$ dla wszystkich większych x. Oczywiście dla liczb pierwszych x mamy $f(x)=x+1$; ale dla liczb złożonych $x>8$ jest $f(x)\leqslant x-2$, co nietrudno wykazać np. przez indukcję względem długości rozkładu x na czynniki pierwsze. Wynika stąd, że dla dowolnej liczby $x>8$ dwukrotne zastosowanie operacji f da liczbę $ff(x)<x$. Jeśli więc $x_0>8$, to $x_2<x_0$; jeśli nadal $x_2>8$, to $x_4<x_2$ itd; po skończenie wielu krokach dojdziemy do wartości x_n równej 7 lub 8 i dalej będzie się powtarzać 7, 8, 7, 8, 7, 8, ... Ten sam wynik dostaniemy, gdy wystartujemy od $x_0=7$ lub 8. Jeśli natomiast $x_0\leqslant 6$, to po kilku krokach osiągniemy $x_n=6$ i dalej $x_n=x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=6$. Tak więc jedynie liczby 6, 7, 8 mogą wystąpić w ciągu x_n nieskończenie wiele razy.

29. Przykład rozcięcia kwadratu $ABCD$ na 8 trójkątów ostrokątnych: niech K i L oznaczają środki boków AB i CD, niech P będzie punktem leżącym wewnątrz prostokąta $AKLD$, ale na zewnątrz kół mających za średnice odcinki AK i AD, oraz niech Q będzie punktem symetrycznym do P względem prostej KL. Trójkąty AKP, APD, DPL, LPQ, LQC, QBC, QKB, KQP mają żądane własności. Można udowodnić, że nie da się rozciąć kwadratu na mniej niż 8 trójkątów ostrokątnych.

30. Odpowiedź na oba pytania jest pozytywna. Oto przykład pary funkcji wypukłych, których wykresy przecinają się w nieskończenie wielu punktach: $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+\sin x$. Aby otrzymać parę funkcji wypukłych o wykresach przecinających się w n punktach, wystarczy wziąć te same dwie funkcje na przedziale $\langle 0,(n-1)\pi\rangle$ i przedłużyć je do funkcji liniowych na przedziałach $(-\infty,0\rangle$ i $\langle (n-1)\pi,+\infty)$, których wykresami są półproste styczne do wykresów funkcji f i g w punktach 0 oraz $(n-1)\pi$.