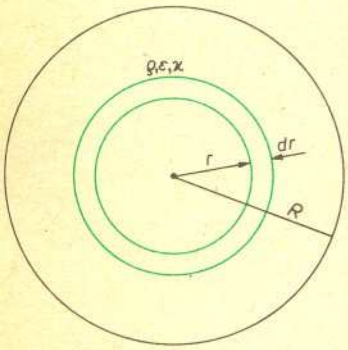
Czy równania budowy wewnętrznej gwiazd są zbędne?

Dr Tomasz KWAST

Już nie raz przy okazji omawiania zagadnień związanych z budową gwiazd autorzy powoływali się na dość tajemnicze „równania budowy wewnętrznej". Otóż jest duża szansa, że w jednym z najbliższych numerów „Delty" ukaże się rzetelne ich wyprowadzenie, a co za tym idzie, powoływanie się na nie przestanie być tak gołosłowne, jak jest dotychczas. Mając tę nadzieję na przyszłość zobaczymy teraz, co ciekawego można się dowiedzieć z dwóch spośród równań opisujących budowę wnętrza gwiazdy. Aby jednak już uniknąć wspomnianej gołosłowności, musimy choćby w kilku zdaniach przedstawić, skąd się te dwa wybrane równania biorą.

Załóżmy więc, że interesuje nas stacjonarna i kulista gwiazda o promieniu R, masie M i mocy (jasności) L. Niech L_r oznacza moc produkowaną w gwieździe w kuli o promieniu r, zaś ε moc produkowaną przez jednostkę masy materii gwiazdy. Moc kuli o promieniu o $\mathrm{d}r$ większym będzie o $\mathrm{d}L_r$ większa, co jest równe mocy warstewki kulistej zaznaczonej na rysunku, czyli mocy



produkowanej w jednostce objętości $\varrho\varepsilon$ (ϱ oznacza gęstość materii gwiazdy) pomnożonej przez pole „podstawy" $4\pi r^2$ i „wysokość" $\mathrm{d}r$. Tak otrzymujemy pierwsze poszukiwane równanie (różniczkowe) określające produkcję energii w gwieździe:

$$\frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \varrho\varepsilon.$$

Drugie obiecane równanie będzie opisywać tzw. promienisty transport energii w gwieździe. Transport energii może w zasadzie odbywać się jeszcze na drodze przewodnictwa cieplnego oraz przez konwekcję. Przewodnictwo cieplne gazu jest z natury rzeczy nieznaczne i z góry można ten mechanizm pominąć, zaś konwekcja, owszem, może w gwieździe zachodzić, ale nie będziemy się tu zajmować ani nią, ani warunkami jej wystąpienia — ograniczamy się do przypadku gwiazdy w całości „promienistej", czyli w której energia przenosi się jedynie w postaci samego promieniowania.

Niech więc tzw. współczynnik nieprzezroczystości $\varkappa$ będzie tak określony, że w słupku gazu o jednostkowej podstawie (przez którą przepływa energia w tempie $L_r/4\pi r^2$) i wysokości $\mathrm{d}r$ zostanie zaabsorbowane $\dfrac{L_r}{4\pi r^2}\varkappa\varrho\,\mathrm{d}r$ energii. Ilość zaabsorbowanego w tym słupku pędu otrzymamy dzieląc tę energię przez prędkość światła c. Ale ilość pochłoniętego pędu jest w tym przypadku spadkiem ciśnienia promieniowania — $\mathrm{d}P_{\mathrm{prom}}$ na drodze $\mathrm{d}r$.

Skoro jeszcze $P_{\mathrm{prom}} = \dfrac{1}{3}\mathrm{a}T^4$ (T jest tu temperaturą materii we wnętrzu gwiazdy, zaś a stałą fizyczną równą $7{,}565\cdot 10^{-16}\ \mathrm{Pa/K^4}$), to już łatwo dostajemy równanie (też różniczkowe) promienistego transportu energii w gwieździe:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{3\varkappa\varrho}{4\mathrm{ac}T^3}\,\frac{L_r}{4\pi r^2}.$$

Te dwa równania z pewnymi uzupełnieniami i odpowiednio „spreparowane" pozwolą nam wyciągnąć bardzo ważne wnioski ogólne co do budowy gwiazd. Najciekawsze przy tym, że w ogóle nie będziemy próbować rozwiązywać tych równań. Uzupełnieniami muszą być znane skądinąd zależności ε i $\varkappa$ od warunków panujących w materii wnętrza gwiazdy. W dość dobrym przybliżeniu przyjmuje się formuły empiryczne: $\varepsilon = \varepsilon_0\varrho T^n$, zaś $\varkappa = \varkappa_0\varrho T^b$, gdzie ε_0 i $\varkappa_0$ zależą tylko od składu chemicznego materii, $n \approx 18$ i $b \approx -3{,}5$.

Wprowadźmy teraz bezwymiarowe zmienne x, φ, l, t przez podstawienia: $r = xR$, $\varrho = \varphi\dfrac{M}{4\pi R^3}$, $L_r = lL$, $T = t\dfrac{\mu\mathrm{HG}M}{\mathrm{k}R}$, gdzie μ oznacza średnią masę atomową materii gwiazdy, H masę atomu wodoru, G stałą grawitacji, k stałą Boltzmanna. Dzięki tym podstawieniom w całej grupie gwiazd zbudowanych według tego samego modelu (tzn. o tych samych μ, ε_0, $\varkappa_0$, n, b) jednakowym x odpowiadają jednakowe φ, l i t. Nasze dwa równania różniczkowe po wszystkich niezbędnych podstawieniach przyjmują postać:

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = \Lambda x^2\varphi^2 t^n, \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\Theta\varphi^2 t^{b-3} l/x^2,$$

gdzie

$$\Lambda = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\left(\frac{\mu\mathrm{HG}}{\mathrm{k}}\right)^n \frac{M^{n+2}}{LR^{n+3}}$$

$$\text{i } \Theta = \frac{1}{(4\pi)^3}\,\frac{3\varkappa_0}{4\mathrm{ac}}\left(\frac{\mu\mathrm{HG}}{\mathrm{k}}\right)^{b-4}\frac{M^{b-2}L}{R^{b+3}}$$

są stałymi dla gwiazd zbudowanych według tego samego modelu.

W szczególności jeśli mają to być gwiazdy zbudowane jak Słońce, to Λ i Θ muszą być takie same dla nich i dla Słońca. Ze stałości Λ mamy wtedy

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{n+2} = \frac{L}{L_\odot}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{n+3},$$

zaś z Θ

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{b-2}\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{b+3},$$

gdzie symbol $\odot$ oznacza parametry Słońca. Dołączywszy tradycyjne prawo promieniowania $L = 4\pi R^2\sigma T^4$ ($\sigma = 5{,}670\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2K^4}$ jest tzw. stałą Stefana) zapisane w postaci

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4,$$

gdzie T oznacza teraz temperaturę powierzchni gwiazd, mamy trzy równości, z których łatwo można znaleźć 6 związków między każdymi dwoma parametrami spośród M, L, R i T. Pomijając dla prostoty zapisu mianowniki zawierające parametry Słońca i podstawiwszy liczbowe wartości n i b dostajemy na koniec:

$T = R^{1.32}$ — gwiazdy większe są zarazem gorętsze,

$M = R^{1.41}$ — wykładnik mniejszy od 3 dowodzi, że gwiazdy większe mają mniejszą średnią gęstość,

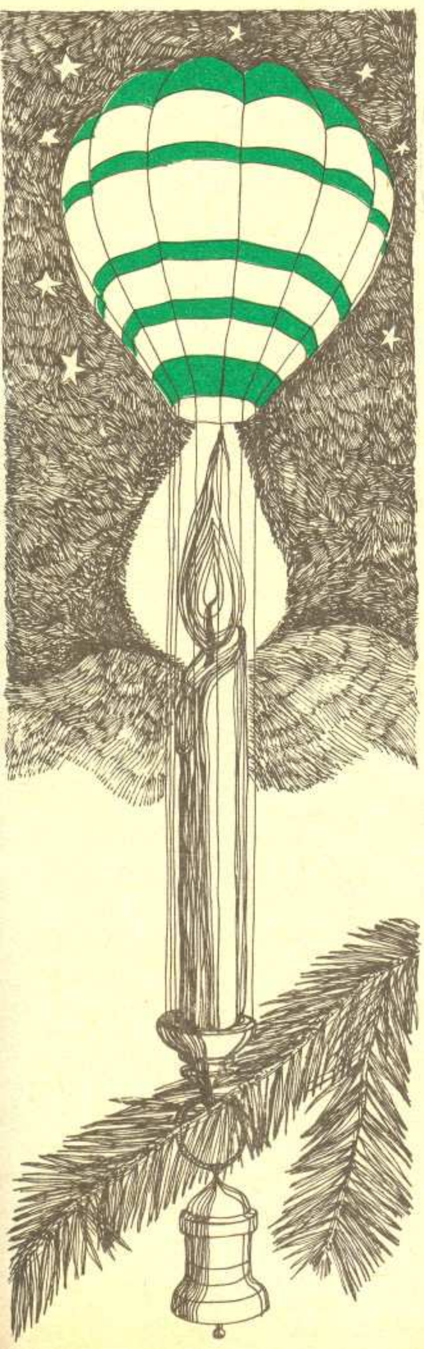
$L = R^{7.28}$ — wykładnik większy od 2 potwierdza, że gwiazdy większe są znacznie gorętsze (ich jasność powierzchniowa jest większa),

$T = M^{0.93}$ — gwiazdy masywniejsze są gorętsze, z tym że tu zależność jest akurat prawie proporcjonalna,

$L = M^{5.15}$ — jest to tzw. zależność masa-jasność, z której widać, że gwiazdy masywniejsze są dość drastycznie jaśniejsze, czyli dużo szybciej zużywają swoje zapasy energii — zatem szybciej ewoluują i żyją krócej niż gwiazdy mało masywne,

$L = T^{5.52}$ — wykładnik większy od 4 jeszcze raz potwierdza, że gwiazdy gorętsze są zarazem większe, a ponadto jest to nic innego, jak równanie ciągu głównego na diagramie Hertzsprunga-Russella!

No i proszę — tyle istotnych informacji bez rozwiązywania równań budowy! Rzecz jasna, nie są one tak całkiem zbędne — ostatecznie były punktem wyjścia dla naszego rozumowania, jak również nadal nie znamy budowy żadnej gwiazdy, czyli wartości gęstości, ciśnienia, temperatury itd. w każdym punkcie wewnątrz niej. Ale i tak dowiedzieliśmy się sporo, aczkolwiek nie można zapominać o założeniach leżących u podstaw naszych wniosków. Założeniem było wszak przyjęcie empirycznych formuł na ε i $\varkappa$ z konkretnymi wykładnikami — w rzeczywistości wykładniki te zależą od temperatury, a nawet sama postać formuł nie jest w pełni uniwersalna. Milczącym założeniem było przyjęcie jednorodności gwiazd, czyli stałości μ w całej objętości gwiazdy. Wreszcie założenie promienistego transportu energii jest spełnione tylko w gwiazdach podobnych do Słońca, zaś w gwiazdach masywnych występuje konwektywne jądro, a u mało masywnych podpowierzchniowa warstwa konwektywna. Wskutek tego wszystkiego znalezione przez nas związki są wprawdzie poprawne jakościowo, ale ilościowo opisują dość dobrze jedynie gwiazdy podobne do Słońca, czyli środkowej części rzeczywistego ciągu głównego. W całości nie może on zatem być linią prostą na diagramie H-R z logarytmicznymi skalami na osiach, co doskonale potwierdzają obserwacje. W każdym razie najważniejsze jest, że samo istnienie ciągu głównego, jak widzimy, nie jest wynikiem przypadkowego gromadzenia się gwiazd na dość dowolnie wybranym wykresie, lecz prawidłowością będącą bezpośrednią konsekwencją podstawowych praw przyrody.



SKĄD SIĘ BIORĄ POMYSŁY?

Głupie pytanie, prawda? Nie ma jednak głupich pytań — bywają za to głupie odpowiedzi.

Niektóre „pomysły" biorą się ... nie wiadomo skąd, choć i w matematyce matką wynalazków jest potrzeba. Często jednak to, co odbieramy jako „nieprawdopodobne skojarzenie" jest dla lepszego od nas specjalisty zupełnie typowe.

Spotykamy się z tym już w szkole podstawowej, gdy umiemy rozwiązać zadanie za pomocą równań, ale musimy bez nich, bo „jeszcze nie było". Potem przyzwyczajamy się tak, że nawet nie umiemy zadania takiego jak
Ojciec ma obecnie tyle lat, ile miesięcy miał syn w chwili, gdy był 9 razy młodszy od ojca. Ojciec jest starszy od syna o 26 lat i 8 miesięcy. Ile lat ma teraz ojciec? (egzamin wstępny do XIV LO w W-wie, 1982)

rozwiązać inaczej niż za pomocą równań, choć przecież można. Można, ale po co? Przecież między innymi po to uczymy się różnych nowych rzeczy, aby łatwiej rozwiązywać problemy.

Jest i druga strona medalu. W pogoni za coraz bardziej ogólnymi teoriami często nie umiemy już wrócić: znając teorię grup, nie umiemy jej zupełnie stosować. To bardzo niebezpieczne.

Na duże niebiezpieczeństwo narażeni są tu algebraicy; współczesna algebra abstrakcyjna bardzo niewiele przypomina algebrę, którą znamy ze szkoły. Nic więc dziwnego, że właśnie w tej dyscyplinie niedługo po genialnych pomysłach francuskiej szkoły pojawiła się idea „powrotu do natury": formułowanie wszystkiego w języku algebry szkolnej.
Można? Można, ale po co. Oto bowiem zdanie

n jest liczbą pierwszą

rozebrane „na atomy", tj. sprowadzone do podstawowych pojęć i relacji pierwotnych — *należenia elementu do klasy* (zbioru): n jest elementem każdej takiej klasy z, że klasa, której jedynym elementem jest klasa bez elementów, jest klasą z i dla każdego elementu m klasy z rodzina wszystkich tych klas, które po zmniejszeniu o jeden element należą do klasy m, jest elementem klasy z i dla wszystkich takich h i k, że elementy każdej klasy z takiej, że klasa, której jedynym elementem jest klasa bez elementów, jest elementem klasy z i dla każdego elementu klasy z klasa wszystkich tych klas, które po zmniejszeniu o jeden element należą do m jest elementem klasy z i jeżeli dla każdego elementu x klasy n istnieje taki element y klasy h, że wszystkie elementy klasy y są elementami klasy k i elementy klasy y nie mają wspólnych elementów, oraz wszystkimi, a zarazem jedynymi elementami elementów klasy y są elementy klasy x, to h lub k jest rodziną wszystkich tych klas, które po usunięciu jednego elementu stają się klasą bez elementów.