

Spirale są wszędzie...



Gdy „mała delta” była jeszcze dodatkiem do „dużej”, w jednym z numerów pisaliśmy o spiralach. Opisywaliśmy, gdzie w przyrodzie (i technice) można spotkać spirale. A więc spiralę Archimedeusza zatacza mucha idąca wzdłuż promienia obracającej się płyty gramofonowej, spiralę logarytmiczną wykorzystuje się w obrotowych nożach (chodzi o to, by kąt cięcia był stały), a spiralna linia przecinająca południki Ziemi pod stałym kątem nazywa się loksodromą.

Nasz tegoroczny konkurs jest poświęcony spiralom właśnie, a konkretnie prosimy o

CIEKAWY ZDJĘCIA SPIRAL

Można spiralę wytworzyć do potrzeb zdjęcia (np. puścić muchę z latarką po płycie) lub wyszperać ją w naturze.

Prosimy nie fotografować linii śrubowych (gwint, „spiralka” maszyny elektrycznej) ani cykloid.

Na zwycięzców czekają liczne nagrody.



Analiza wymiarowa

Mgr Tomasz TRATKIEWICZ

Nigdy nie zabieraj się do obliczeń, jeśli nie znasz odpowiedzi

John Archibald Wheeler

Prawa fizyki formułowane są jako relacje matematyczne między wielkościami fizycznymi. Relacje te muszą prowadzić do identycznych rezultatów niezależnie od użytych jednostek miar. Dlatego też zajmowanie się jednostkami, pomijając względy czysto pragmatyczne (wygoda obliczeń, kontrola poprawności rozwiązań) lub estetyczne (prostota czy elegancja matematycznego zapisu) nie wydaje się być, na pierwszy rzut oka, zbyt atrakcyjne.

W dalszym ciągu pokażemy w rozwiązywaniu jakich problemów może być pomocna analiza zależności fizycznych pod kątem jednostek miar — tzw. analiza wymiarowa. Warto przyjrzeć się realnym możliwościom tej metody, gdyż niektórzy uważają ją za całkowicie zbędną, a inni skłonni są widzieć w niej narzędzie o niemal nieograniczonych możliwościach.

Każda wielkość fizyczna musi być wyrażona w ściśle zdefiniowanych i zrozumiałych dla każdego jednostkach. Umownie zapisuje się to w postaci

$$A = \{A\} [A],$$

gdzie A jest wielkością fizyczną, $\{A\}$ jej wartością liczbową, a $[A]$ — jednostką; np. $s = 2$ łokiec, s -długość; $\{s\} = 2$; $[s] =$ łokiec.

Jednostki obu stron równości (czy nierówności) muszą być zawsze identyczne, ponieważ nie ma żadnego sensu porównywanie wielkości fizycznych o różnych wymiarach. Podobnie jest z dodawaniem i odejmowaniem. Dopuszczalne jest natomiast mnożenie i dzielenie.

Wyrażenie funkcyjne postaci: \sin (droga), \log (ciśnienie) nie mają właściwie sensu, choć bywają czasami stosowane jako wygodny chwyt ułatwiający techniki rachunkowe (np. prostowanie funkcji) lub pewien skrót myślowy (np. definicja pH w chemii).

W zasadzie można dla każdej wielkości fizycznej zdefiniować jej własny wzorec. W równaniach fizycznych roiliby się jednak wtedy od stałych wymiarowych, zapewniających jednorodność jednostek. Dlatego zawsze ogranicza się liczbę wzorców do niezbędnego minimum. Jednostki wielkości, którym przypisuje się wzorce to tzw. jednostki podstawowe. Pozostałe jednostki definiuje się na podstawie zależności spełnianych przez te wielkości. Np. wzorem definiującym jednostkę siły w układzie SI jest $F = am$, co zapisuje się w postaci

$[F] = \text{ms}^{-2}\text{kg}$ lub $[F] = \text{LT}^{-2}\text{M}$, gdzie L, T, M to dowolne wzorce długości, czasu i masy.



Z powyższych reguł wynika fakt stanowiący podstawę analizy wymiarowej — wymiar dowolnej wielkości fizycznej jest iloczynem potęg jednostek podstawowych. Poniżej przytaczamy kilka przykładów zastosowania analizy wymiarowej mających ilustrować tę metodę w działaniu, pokazać typowe wyniki, do jakich prowadzi oraz wskazać środki umożliwiające najefektywniejsze jej wykorzystanie.

A. Znaleźć pojemność elektryczną przewodzącej sfery znajdującej się w nieskończonym jednorodnym i izotropowym dielektryku.

Pojemność powinna zależeć od wymiaru liniowego — promienia oraz własności ośrodka — stałej dielektrycznej:

$$(1) \quad C = f(R, \epsilon).$$

Poszukujemy f w postaci

$$f(R, \epsilon) = D \cdot R^\alpha \cdot \epsilon^\beta, \text{ gdzie } D, \alpha, \beta \text{ — stałe bezwymiarowe.}$$

1. W układzie CGS

$$[C] = \text{cm}, [R] = \text{cm}, [\epsilon] = 1, \text{ czyli} \\ C = D(\epsilon) \cdot R.$$

2. W układzie SI

$$[C] = \text{m}^{-2} \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{A}^2, [R] = \text{m}, \\ [\epsilon] = \text{m}^{-3} \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{A}^2.$$

Porównując wymiary obu stron równości (1)

$$\text{m}^{-2} \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{A}^2 = \text{m}^{\alpha-3} \text{s}^{4\beta} \text{kg}^{-\beta} \text{A}^{2\beta}$$

otrzymujemy układ równań

$$\alpha - 3\beta = -2, \quad \beta = 1.$$

Zatem $C = D'\epsilon R$.

Dokładne obliczenia dają $D(\epsilon) = \epsilon, D' = 4\pi$. Warto zauważyć, że

— zastosowanie układu SI dało lepsze rezultaty, co jest związane z większą liczbą jednostek podstawowych,

— przyjęcie, że C zależy dodatkowo od innych wielkości, np. gęstości czy ładunku, nie zmieniłoby wyniku.

B. Wahadło matematyczne o długości l ma w położeniu równowagi prędkość v_0 . O jaki kąt φ wychylił się to wahadło?

$$\varphi = f(v_0, l, g).$$

Postulujemy potęgową postać funkcji f

$$f(v_0, l, g) = C v_0^\alpha l^\beta g^\gamma.$$

Analizy dokonamy w układzie LT, tj. długość i czas przyjmujemy za wielkości podstawowe.

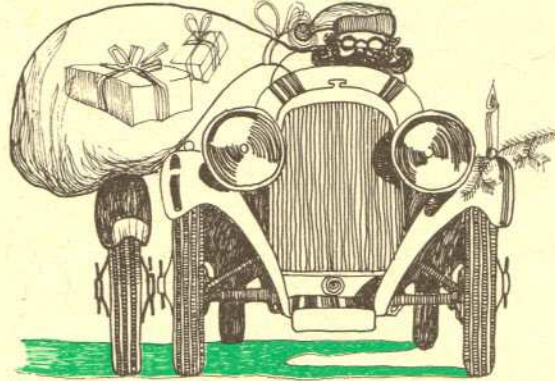
$$[\varphi] = 1, [l] = L, [g] = \text{LT}^{-2}, [v_0] = \text{LT}^{-1}.$$

Porównanie $[\varphi]$ i $[f]$ daje

$$\alpha = -2\gamma, \quad \beta = \gamma, \quad \text{czyli:}$$

$$\varphi = C \left(\frac{lg}{v_0^2} \right)^\gamma.$$

Ponieważ wielkość $\pi = lg/v_0^2$ jest bezwymiarowa, możemy stąd wywnioskować jedynie, że φ jest pewną funkcją π .



Po prześledzeniu tych przykładów jasne chyba będą następujące stwierdzenia:

1. Jeżeli u jest wielkością fizyczną zależną od wymiarowych wielkości X_1, \dots, X_{N-1}

$$u = f(X_1, \dots, X_{N-1}),$$

wtedy przy użyciu analizy wymiarowej można przedstawić ją w postaci

$$(1) \quad u = P(X_1, X_2, \dots, X_{N-1}) F(\pi_1, \pi_2, \dots),$$

gdzie $P(X_1, X_2, \dots, X_{N-1}) = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_{N-1}^{\alpha_{N-1}}$, a π_1, π_2, \dots — wielkości bezwymiarowe utworzone z parametrów X_1, X_2, \dots, X_{N-1} .

W szczególności, gdy $u = \text{const.}$ i $[u] = 1$:

$$(2) \quad u = F(\pi_1, \pi_2, \dots),$$

natomiast gdy niemożliwe jest skonstruowanie wielkości bezwymiarowych:

$$(3) \quad u = CP(X_1, \dots, X_{N-1}).$$

2. Jeżeli wymiary u, X_1, \dots, X_{N-1} wyrażają się przez K jednostek podstawowych, to dla

$$N - K = 1$$

istnieje jednoznaczne rozwiązanie i można je znaleźć metodą analizy wymiarowej. Ma ono postać (3), gdzie nieokreślony pozostaje tylko bezwymiarowy współczynnik C . Jest to przypadek najbardziej korzystny, gdyż dostarcza najdokładniejszych informacji o poszukiwanej zależności. Warto zwrócić uwagę, że współczynnik jest przeważnie rzędu jedności.

Na zakończenie jeszcze kilka uwag. Za pomocą analizy wymiarowej nie możemy oczywiście odkrywać nowych praw fizycznych. Może ona dostarczać jedynie zależności wynikających z praw już dostępnych, a od naszej intuicji fizycznej zależy, do jakiego stopnia uda nam się zmniejszyć nieuniknione w tej metodzie niepewności (istotne jest np. właściwe wybranie jednostek podstawowych i układu parametrów).

Jednym z zastosowań analizy wymiarowej jest szacowanie wartości wielkości fizycznych czy też przybliżonego charakteru zależności opisujących zjawiska o złożonym modelu matematycznym. Metoda ta może też być pomocna w trakcie eksperymentów mających za zadanie wyznaczenie zależności pomiędzy wieloma parametrami. Dzięki możliwości tworzenia wielkości bezwymiarowych można znacznie zmniejszyć liczbę niezbędnych doświadczeń.

C. Jaki jest zasięg rzutu ciała o masie m wyrzuczonego z prędkością v_0 pod kątem φ ? Opór ośrodka pomijamy.

$$l = f(v_0, g, \varphi, m).$$

Zakładamy

$$l = C \cdot v_0^\alpha \cdot g^\beta \cdot \varphi^\gamma \cdot m^\delta.$$

W układzie LMT równanie wymiarowe ma postać:

$$L = L^{\alpha+\beta} T^{-(\alpha+2\beta)} M^\delta.$$

Stąd

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha + 2\beta = 0, \quad \delta = 0, \quad \text{czyli}$$

$$l = C(\varphi) \cdot \frac{v_0^2}{g}.$$

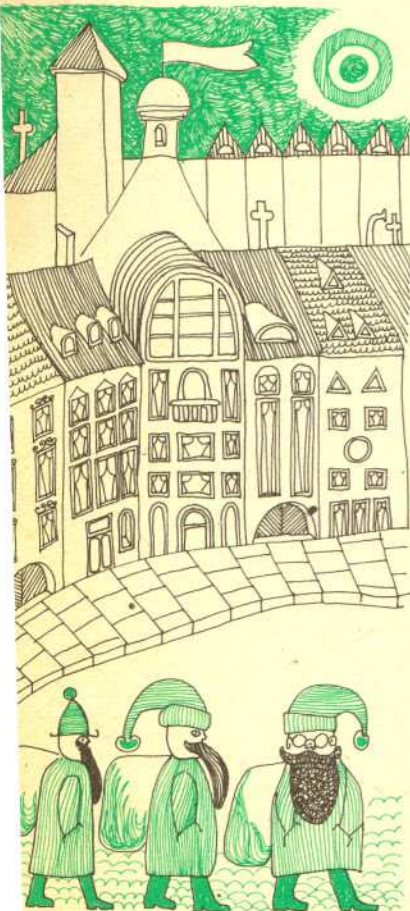
Prowadząc analizę wymiarową nieco inaczej można znaleźć także postać funkcji $C(\varphi)$. Zauważmy, że prędkość i przyspieszenie są wektorami, więc można prowadzić analizę niezależnie dla rzutów na oś x i oś y . Wystarczy w tym celu wprowadzić oddzielne wymiary dla osi poziomej (L_x) i pionowej (L_y).

Teraz $l = f(v_{0x}, v_{0y}, g) = D v_{0x}^\alpha v_{0y}^\beta g^\gamma$ i z równania wymiarowego otrzymujemy

$$\alpha = 1, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + 2\gamma = 0, \quad \text{a stąd}$$

$$l = C \cdot \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = C \cdot \frac{v_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{g}.$$

Stałą C można teraz wyznaczyć doświadczalnie — wystarczy zmierzyć zasięg dla jednej wartości kąta φ .





Analiza wymiarowa jest także podstawą wszelkich doświadczeń modelowych. Zmianę np. rozmiarów układu kompensuje się zmieniając inne parametry tak, by wielkości bezwymiarowe były w układzie modelowym takie jak w rzeczywistym. Często zapewnia to podobieństwo sytuacji fizycznych.

Bardziej zaawansowane problemy, rozwiązane poniżej, przekonają, miejmy nadzieję, Czytelników, że analiza wymiarowa to nie tylko „wyciąganie królika z kapelusza”.

KATASTROFA ULTRAFIOLETOWA

Zamknięte pudełko, którego ścianki utrzymywane są w stałej temperaturze, wypełnione jest promieniowaniem elektromagnetycznym wysyłanym i pochłanianym przez atomy ścianek. W stanie równowagi termodynamicznej promieniowanie to ma taką samą gęstość energii $u(T)$ w każdym punkcie wewnątrz pudełka, a co więcej w każdym punkcie taki sam jest rozkład energii pomiędzy różne częstotliwości, tzw. gęstość widmowa $q(\nu, T)$. Zsumowana po wszystkich częstotliwościach gęstość widmowa musi być oczywiście równa gęstości energii:

$$\int_0^{\infty} q(\nu, T) d\nu = u(T).$$

Połączenie dwóch różnych pudełek o tych samych temperaturach ścianek i różnych gęstościach widmowych światłowodem przepuszczającym tylko jedną częstotliwość doprowadziłoby do przepływu energii między pudełkami, co jest sprzeczne z II zasadą termodynamiki. Wynika stąd, że gęstość widmowa nie może zależeć ani od materiału, z którego zbudowane jest pudełko, ani od jego objętości; jest uniwersalną funkcją temperatury i częstotliwości. Z punktu widzenia fizyki klasycznej do wzoru określającego gęstość widmową mogą wchodzić, poza ν i T , tylko dwie stałe uniwersalne: prędkość światła c (elektrodynamika) i stała Boltzmanna k (termodynamika).

Załóżmy, że q jest iloczynem dowolnych potęg ν , T , c i k :

$$q(\nu, T) = A \nu^\alpha T^\beta c^\gamma k^\delta.$$

Porównując wymiary obu stron równania:

$$\text{kg}^1 \text{m}^{-1} \text{s}^{-1} = (\text{s}^{-1})^\alpha \cdot \text{K}^\beta \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^\gamma \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})^\delta,$$

dostajemy $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$ i $\delta = 1$.

Poszukiwana zależność ma więc postać:

$$q(\nu, T) = A \frac{kT}{c^3} \nu^2, \text{ gdzie } A \text{ jest stałą bezwymiarową.}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób prawo Rayleigha-Jeansa wyprowadzane w ramach klasycznej fizyki statystycznej. Opisuje ono doskonale wyniki eksperymentalne dla niewielkich częstotliwości, zupełnie natomiast zawodzi przy dużych częstotliwościach.

Neograniczony wzrost gęstości widmowej z ν prowadzi poza tym do absurdalnego wyniku („katastrofa ultrafioletowa”), a mianowicie do nieskończonej wartości gęstości energii $u(T)$. Zgodnie z empirycznym prawem Stefana-Boltzmanna gęstość ta powinna być proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury.

Aby uniknąć tego paradoksu, konieczne jest wprowadzenie nowej uniwersalnej stałej wymiarowej spoza fizyki klasycznej. Możemy ją uwzględnić w analizie wymiarowej zakładając, że A jest teraz funkcją ν , T , c , k i nowej stałej κ . Ponieważ A jest bezwymiarowe, interesują nas wszystkie bezwymiarowe iloczyny potęg wymienionych parametrów:

$$[\nu^\alpha \cdot T^\beta \cdot c^\gamma \cdot k^\delta \cdot \kappa^\epsilon] = 1.$$

Ponieważ A musi zależeć od ν , więc $\alpha \neq 0$ i możemy przyjąć dla wygody $\alpha = 1$, bo dowolna potęga wielkości bezwymiarowej jest również wielkością bezwymiarową. Poza tym, ponieważ wymiaru nowej stałej nie znamy, możemy wprowadzić inną stałą $h = c^\gamma k^{\delta+1} \kappa^\epsilon$, dlaczego akurat taką — okaże się za chwilę.

Wymiar h musimy oczywiście wybrać tak, aby $[\nu \cdot T^\beta \cdot h \cdot k^{-1}] = 1$, czyli $[h] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{K}^{-(\beta+1)}$.

Wykładnik β określiliśmy na podstawie prawa Stefana-Boltzmanna. Gęstość energii jest równa całce z gęstości widmowej

$$u(T) = \frac{kT}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^2 \cdot 1(\nu \cdot T^\beta \cdot h \cdot k^{-1}) d\nu.$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej całkowania $x = \nu T^\beta h k^{-1}$ łatwo zauważyć, że $u(T) \sim T^{1-3\beta}$. Zgodność z prawem Stefana-Boltzmanna dostaniemy więc dla $\beta = -1$. Gęstość widmowa ma teraz postać

$$q(\nu, T) = A \left(\frac{h\nu}{kT} \right) \frac{kT}{c^3} \nu^2, \text{ a } [h] = \text{J} \cdot \text{s}.$$

Nową stałą wymiarową h wprowadził w 1900 r. Planck ratując fizykę przed „katastrofą ultrafioletową”. Stała ta — wiąże falowy opis promieniowania z opisem korpuskularnym i jest podstawową stałą mechaniki kwantowej.

CZAS TRWANIA DOSKONAŁE SPRĘŻYSTEGO ZDERZENIA KUL

Ograniczymy się w naszych rozważaniach do centralnych zderzeń identycznych jednorodnych kul, ponieważ chcemy czas zderzenia tylko oszacować. Poszukiwana wielkość powinna zależeć od średnicy kul — D , prędkości względnej — v oraz stałych materiałowych: gęstości ρ i modułu sprężystości E :

$$T = f(D, E, v, \rho); N - K = 5 - 3 = 2 \text{ w układzie LTM.}$$

Aby uniknąć pojawienia się wielkości bezwymiarowych, wprowadzamy trzy niezależne jednostki długości w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach; wtedy

$$T = CD^\alpha E^\beta v^\gamma \rho^\delta, \text{ gdzie}$$

$$[D] = L_x^{1/3} \cdot L_y^{1/3} \cdot L_z^{1/3}, [E] = ML_x^{-1/3} \cdot L_y^{-1/3} \cdot L_z^{-1/3} \cdot T^{-2},$$

$$[\rho] = L_x T^{-1}, [\rho] = ML_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1}.$$

Wymiary D , E i ρ wyznaczaliśmy wykorzystując symetrię własności i kształtu kul.

Równanie wymiarowe

$$T^1 = (L_x L_y L_z)^{1/3} \alpha (ML_x^{-1/3} L_y^{-1/3} L_z^{-1/3} T^{-2})^\beta \cdot (L_x T^{-1})^\gamma \cdot (ML_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1})^\delta$$

proceedzi do wyniku:

$$T = C \cdot \frac{D}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}},$$

gdzie wielkość $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ jest równa prędkości dźwięku w ciele stałym. Jeśli $C \approx 1$, czas zderzenia jest w przybliżeniu równy czasowi przechodzenia fali dźwiękowej przez kulę. Dane doświadczalne potwierdzają w większości przypadków tę ocenę. Ścisłe rozwiązanie problemu jest trudne rachunkowo ze względu na złożoność modelu zderzenia.

LEPKOŚĆ GAZÓW RZECZYWISTYCH

Dane empiryczne wskazują, że lepkość gazów w znacznym przedziale temperatur spełnia zależność:

$$\eta = CT^A, \text{ } C, p \text{ — stałe dla danego gazu.}$$

Na podstawie tej informacji możemy oszacować charakter zależności sił międzycząsteczkowych od wzajemnej odległości molekuł.

Lepkość, związana z transportem pędu, jest wynikiem zderzeń cząsteczek, zatem o jej wartości decydować winny siły odpychania. Przyjmijmy, iż są one postaci:

$$F = \frac{A}{r^q}; \text{ } A \text{ — stała, } [A]_{SI} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \text{m}^q = \text{kg} \cdot \text{m}^{q+1} \text{s}^{-2}.$$

Lepkość powinna więc zależeć od: masy cząsteczki m , temperatury T , charakteru sił międzycząsteczkowych — czyli stałej A oraz stałej Boltzmanna k charakterystycznej dla zjawisk molekularnych

$$\eta = f(m, k, T, A),$$

$$\eta \sim k^\alpha T^\beta A^\gamma m^\delta; \text{ gdzie } \beta = p.$$

W jednostkach układu SI mamy:

$$\text{m}^{-1} \text{s}^{-1} \text{kg}^1 \text{K}^0 = (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})^\alpha \cdot \text{K}^p \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{q+1} \text{s}^{-2})^\gamma \cdot \text{kg}^\delta.$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$q = \frac{2p+3}{2p-1}$$

dla helu $p = 0,68$ stąd $q = 12$ i $F \sim \frac{1}{r^{12}}$,

dla CO₂ $p = 0,98$ $q = 5,2$ i $F \sim \frac{1}{r^{5,2}}$.

Wynik dla dwutlenku węgla sugeruje, iż za zderzenia odpowiedzialna jest także część długozasięgowa (przyciągająca) oddziaływań międzycząsteczkowych. I tak jest, gdyż przyciąganie cząsteczek powoduje zakrzywienie ich torów, doprowadzając do zderzeń nawet przy dużych parametrach zderzenia molekuł. Efekt ten zależy od temperatury i jest przyczyną odchylenia wartości wykładnika p od 1/2 przewidywanej przez teorię zjawisk transportu operującą modelem sztywnych kul. Otrzymana przez nas postać siły uśrednia oba efekty.