

Malowanie atomami

Dr Andrzej RADLIŃSKI

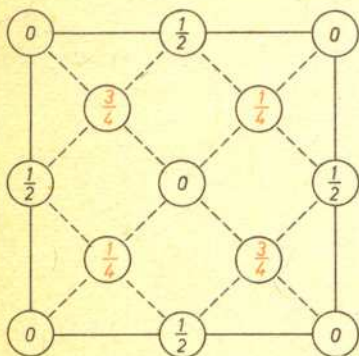
WSTĘP

Czy można prześcignąć przyrodę? To zależy od tego, co chcemy osiągnąć: czy to, co jest sprzeczne z jej podstawowymi prawami, czy też to, czego zrobić jeszcze nie potrafimy na skutek ograniczeń technicznych. Fizycy wierzą (i wciąż to sprawdzają), że prawa przyrody są to reguły obowiązujące powszechnie i że obejść ich się nie da — można je co najwyżej lepiej poznać i zrozumieć. Natomiast ograniczenia techniczne zmieniają się wraz z upływem czasu; to, co było niemożliwe wczoraj, może być powszechnie używanym składnikiem dnia dzisiejszego. Takie przejścia od rzeczy technicznie niemożliwych do już istniejących oczywiście odbywają się teraz. Od trzydziestu lat bardzo wielu tego typu przykładów dostarcza rozwój fizyki i technologii ciał stałych, a zwłaszcza półprzewodników. Aż nie wypada wyjaśniać, co to jest tranzystor czy obwód scalony — pojęcia całkowicie niezbrane trzydzieści lat temu. Ale żeby osiągnąć aktualny poziom precyzji przy konstrukcji tych urządzeń, włożono ogromnie dużo pracy w opanowanie kontrolowanej hodowli kryształów, które są tutaj podstawowym budulcem. Co więcej, trzeba się było nauczyć oceniać jakość tego budulca, a zatem obiektywnie mierzyć jego własności. W ten sposób rozwinęła się współczesna technologia, a wraz z nią i fizyka półprzewodników. W artykule tym opowiemy jak wyhodować kryształy o strukturze i własnościach nie spotykanych w przyrodzie, ale za to bardzo interesujące z punktu widzenia ich zastosowań.

DOSKONAŁOŚĆ KRYSZTAŁÓW

Podstawową cechą kryształów wyróżniającą je spośród innych ciał stałych jest periodyczność struktury. Własność periodyczności oznacza, że można wyróżnić pewien najmniejszy element kryształu, który po wielokrotnym powieleniu w serii przesunięć równoległych utworzy cały kryształ. W przypadku najważniejszych z punktu widzenia zastosowań kryształów półprzewodnikowych (takich jak Ge, Si, GaAs czy GaP) ten najmniejszy element zawiera osiem atomów. Na strukturę krystaliczną tych półprzewodników można spojrzeć tak, jakby powstała w wyniku nakładania na siebie kolejnych warstw kul (rysunek 1), które symbolizują atomy składowe sieci.

W niskich temperaturach (które to pojęcie często obejmuje także i temperaturę pokojową) kryształy półprzewodnikowe



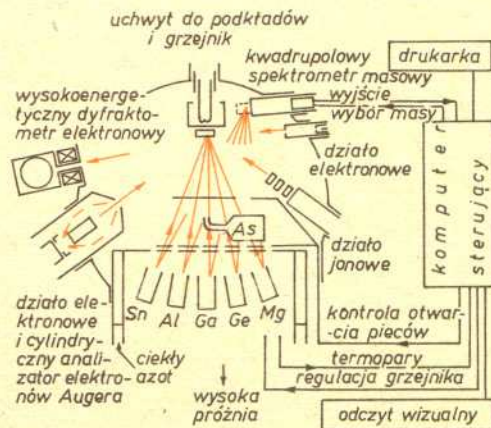
Rys. 1. Sposób ułożenia atomów w sieci krystalicznej niektórych półprzewodników. W przypadku Ge i Si kule symbolizują atomy germanu lub krzemu. W przypadku GaAs i GaP kule czarne symbolizują atomy galu, zaś kule czerwone odpowiednio atomy arsenu lub atomy fosforu. Liczby oznaczają odległości kul od płaszczyzny rysunku w jednostkach umownych.

o takiej idealnej strukturze nie przewodzą prądu elektrycznego (czyli są izolatorami), gdyż nie ma w nich elektronów swobodnych. Jeżeli jednak wyrwać elektron z wiązań chemicznych przez dostarczenie mu z zewnątrz pewnej energii powyżej wartości charakterystycznej dla danego kryształu (np. przez oświetlenie lub ogrzewanie kryształu), to może on się poruszać swobodnie, dopóki nie napotka „dziury” w wiązań. Jednakże taki sposób regulowania przewodnictwa elektrycznego byłby w praktyce dość niewygodny. Znacznie korzystniej jest wprowadzić do kryształu obce atomy, które po wbudowaniu w kryształy mają bądź jeden słabo związany elektron nadmiarowy, (donory), bądź też brak im jednego elektronu do wiązań (akceptory). Donory są łatwo dostępnym źródłem swobodnych elektronów, zaś akceptory stosunkowo łatwo odbierają elektrony z innych wiązań chemicznych, pozostawiając tam dziury. Ponieważ akceptory mogą również wiązać elektrony pochodzące z donorów, więc przez zmianę proporcji ilości donorów do akceptorów można w bardzo szerokim przedziale wartości zmieniać własności (np. elektryczne) półprzewodnika. Wymaga to oczywiście umiejętności kontrolowanego wprowadzenia domieszek obu rodzajów, a także otrzymywania bardzo czystych kryształów wyjściowych.

Można bez wahania powiedzieć, że półprzewodniki swoją dotychczasową karierę zawdzięczają opanowaniu technologii domieszkania. Najczystsze materiały uzyskiwane obecnie przez człowieka zawierają 1 niekontrolowany atom na 10 milionów atomów macierzystych. Jednakże przestała już wystarczać wiedza, ile obcych atomów znajduje się w kryształ. Dalszy postęp technologii układów scalonych czy też struktur elektroluminescencyjnych wymaga umiejętności umieszczania atomów dokładnie w z góry zaprogramowanym miejscu sieci krystalicznej. Do tego właśnie celu służy technologia polegająca na budowaniu kryształu atom po atomie, czyli:

EPITAKSJA WIĄZKĄ MOLEKULARNĄ

Ta metoda hodowli kryształów polega na precyzyjnym nakładaniu na krystaliczne podłoże jednoatomowych warstw składników nowego kryształu — jak przy malowaniu farbą w aerozolu. Przypomina to układanie kulek przedstawionych na rysunku 1, gdzie średnica każdej kulki, będącej w rzeczywistości atomem sieci, wynosi kilka angstromów. Ażeby osiągnąć grubości rozsądne z punktu widzenia badań czy ewentualnych zastosowań, trzeba ułożyć w ten sposób co najmniej kilka tysięcy takich „warstw”. Przyjrzyjmy się z bliska, jak w praktyce wygląda odpowiednie urządzenie.



Rys. 2. Schemat układu do epitaksji wiązką molekularną wraz z aparaturą analityczną.

Aparatura składa się z trzech zasadniczych bloków: aparatury próżniowej, aparatury do osadzania (hodowli) kryształów oraz urządzeń do analizy ich składu chemicznego i struktury krystalicznej. Godnym uwagi jest fakt, że analiza ta odbywa się bez wyjmowania kryształu na zewnątrz komory próżniowej. Wysoka próżnia (rzędu 10^{-8} Pa) jest konieczna ze względu na warunek pozbycia się zanieczyszczeń w postaci gazowych składników powietrza, a także ze względu na konieczność zapewnienia dużej drogi swobodnej cząsteczek w wiązce molekularnej, które tworzą kryształ po osadzeniu ich na podłożu. Z technicznego punktu widzenia uzyskanie i utrzymanie takiej próżni jest stosunkowo kłopotliwe i energochłonne.

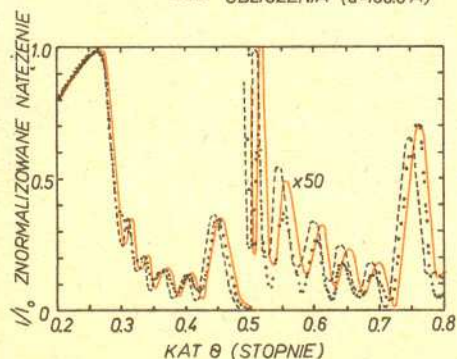
Efuzja to powolny wypływ gazu przez mały otwór.

Blok służący do hodowli kryształów składa się z pieców specjalnej konstrukcji (po jednym dla każdego rodzaju atomów), zwanych piecami efuzyjnymi, oraz z przesuwanego uchwyty z podłożami, z możliwością regulacji ich temperatury. Każdy piec efuzyjny emituje ukierunkowaną w stronę podłoża wiązkę molekularną (lub atomową) odpowiedniego rodzaju pierwiastka i może być niezależnie od innych pieców zamykany i otwierany w bardzo krótkim czasie. Ciśnienie panujące w wiązce molekularnej jest zwykle rzędu 10^{-2} Pa, co pozwala przy osiągalnych technicznie czasach otwierania i zamykania pieca (rzędu 10^{-1} s) bardzo dokładnie regulować stopień zapelnienia nawet jednoatomowej powłoki. Zwykle proces osadzania jest sterowany przez komputer. Bardzo istotny jest tutaj fakt, że przy hodowli kryształów typu AB (np. GaAs) ze względu na własności chemiczne ich elementów składowych istnieje silna tendencja do całkowitego zapelnienia pojedynczych warstw np. typu A, dzięki czemu nie tworzą się „kominy” o wieloatomowej grubości.

I tu dochodzimy do zagadnienia kontroli i analizy struktury hodowanych kryształów. Przy pomocy opisanej aparatury można kontrolować periodyczność struktury oraz skład chemiczny na poziomie warstw jednoatomowych. Badania struktury powierzchni dokonuje się wykorzystując dyfrakcję elektronów — przez analizę zależności ich obrazu dyfrakcyjnego od kąta padania wiązki elektronów w stosunku do powierzchni kryształu (patrz artykuł doc. Mroza, Delta 2/1982). Skład chemiczny atmosfery wewnątrz komory próżniowej jest na bieżąco rejestrowany za pomocą spektrometru masowego.

Objętościowego badania periodyczności struktury dokonuje się wykorzystując dyfrakcję promieni rentgenowskich, analizując zależność obrazu dyfrakcyjnego od kąta padania wiązki rentgenowskiej na powierzchnię kryształu. Badania te prowadzone

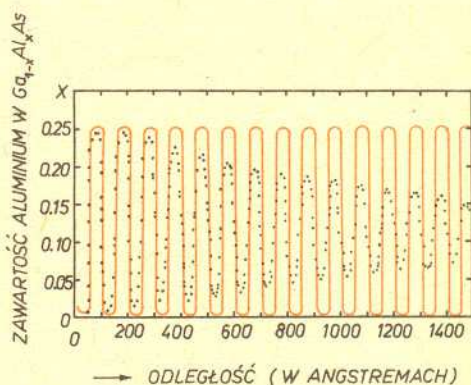
· · · DOŚWIADCZENIE
 ○ OBLICZENIA ($d=127,2 \text{ \AA}$)
 --- OBLICZENIA ($d=130,0 \text{ \AA}$)



Rys. 3. Obraz interferencyjny promieni X dla struktury periodycznej GaAs-AlAs o sześciu okresach o grubości 127,2 Å. Dla porównania z punktami doświadczalnymi pokazano wyniki obliczeń komputerowych.

się po wyjęciu wyhodowanych kryształów z komory próżniowej. Na rysunku 3 przedstawiony jest dyfraktogram rentgenowski dla kryształu mieszanego GaAs-AlAs o sześciu okresach o grubości warstwy 127,2 Å zaprogramowanej w doświadczeniu oraz wyniki obliczeń teoretycznych dla dwu różnych wartości tego okresu. Czyż nie budzi podziwu precyzja tej mikrotechnologii?

Możliwe jest również badanie składu chemicznego kryształu w głąb z rozdzielczością porównywalną z rozmiarami atomów. W tym celu bombarduje się powierzchnię już utworzonej warstwy krystalicznej jonami argonu (gazowy argon o ciśnieniu rzędu 10^{-2} Pa jest jonizowany, a następnie przyspieszany w polu elektrycznym o napięciu rzędu kilowoltów), co powoduje powolne (rzędu 3—10 Å/min) zdejmowanie z niej kolejnych warstw atomowych. Jednocześnie atomy znajdujące się w warstwie powierzchniowej na skutek takiego bombardowania emitują elektrony (zjawisko Augera) o charakterystycznej dla danego rodzaju atomu energii. Mierząc tę energię można powiedzieć, jaki rodzaj atomów właśnie znajduje się na powierzchni, a więc można bardzo dokładnie wyznaczyć skład chemiczny warstwy krystalicznej w jej przekroju poprzecznym. Rysunek 4 przedstawia wynik tego typu analizy przeprowadzonej na kryształ mieszanym $Ga_{1-x}Al_xAs$.



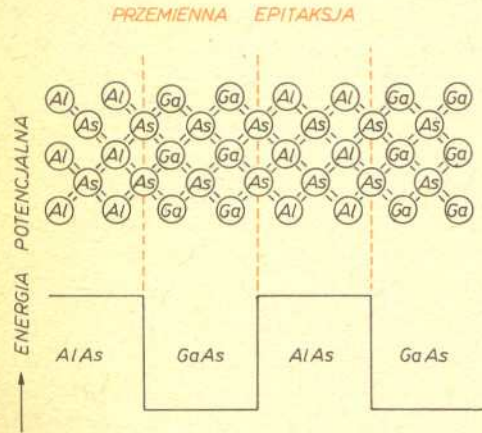
Rys. 4. Profil składu struktury periodycznej zmierzony przy pomocy połączonych technik trawienia działem jonowym i spektroskopii elektronów Augera.

Widzimy zatem, że dostępne techniki doświadczalne pozwalają stwierdzić, iż warstwy krystaliczne hodowane w myśl opisanej powyżej metody charakteryzują się doskonałą strukturą krystaliczną (w zasadzie pozbawioną jakichkolwiek defektów) oraz bardzo dobrze kontrolowanym składem chemicznym. Jest to niewątpliwie zasadniczy postęp w dotychczasowych technikach hodowli kryształów i co za tym idzie, otwiera nowe możliwości ich zastosowań praktycznych. Do tej sprawy powrócimy jeszcze pod koniec tego artykułu.

SUPERSIECI

Mając do dyspozycji aparaturę opisaną w poprzednim rozdziale można na przykład zbudować strukturę złożoną z kolejno leżących warstw półprzewodnika jednego rodzaju o grubości d_1 i półprzewodnika innego rodzaju o grubości d_2 . Jeżeli obie te grubości są rzędu co najmniej kilkudziesięciu odległości międzyatomowych w kryształach, to nie jest już istotne, czy użyte przez nas półprzewodniki mają charakter pierwiastkowy (jak Ge czy Si), czy też są związkami chemicznymi (jak GaAs). Istotne jest co innego: oprócz „normalnej” periodyczności w każdej z warstw składowych pojawiła się dodatkowa, niezależna periodyczność o okresie $d_1 + d_2$, związana z periodyczną sekwencją warstw obu rodzajów. Mówimy w takim wypadku, że mamy do czynienia z supersiecią. Jest to nowa jakość, nie spotykana w kryształach występujących w przyrodzie.

Zajmijmy się najpierw prostą strukturą typu 1—2—1, gdzie 1 oznacza warstwę AlAs, zaś 2 — warstwę GaAs. Wybór tych dwu rodzajów kryształów nie jest przypadkowy. Z powodów, których omówienie przekracza ramy tego artykułu, łączy się z tymi półprzewodnikami wielkie nadzieje w najnowszej technologii układów scalonych. Energia elektronów swobodnych w warstwie typu 2 jest niższa niż w warstwie typu 1 (co przedstawiono na rysunku 5). Zatem wszystkie elektrony swobodne zgromadzą się w obszarze 2, w naszym przypadku o grubości rzędu kilkudziesięciu angströmów. Elektrony te mogą wydostać się z obszaru 2 tylko wtedy, gdy zostanie im dostarczona z zewnątrz energia wystarczająca do przekroczenia bariery pomiędzy obszarem 2 i obszarem 1, na przykład przez podgrzanie kryształu lub dostarczanie energii elektrostatycznej przez przyłożenie zewnętrznego napięcia w kierunku prostopadłym do granicy obszarów 1 i 2.



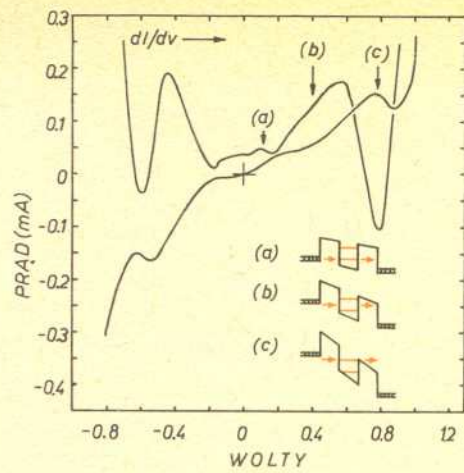
Rys. 5. Schemat budowy struktury typu 1—2—1 oraz kształt energii potencjalnej elektronu w takiej strukturze.

Zasadnicze znaczenie ma odpowiedź na pytanie, jakie poziomy energetyczne mogą być zajmowane przez elektrony znajdujące się w obszarze 2. Nie są to po prostu poziomy charakterystyczne dla półprzewodników typu 2 (czyli określone przez jego strukturę pasmową), gdyż występowanie obu barier drastycznie modyfikuje potencjał, w jakim porusza się elektron. Przywołajmy na chwilę bardziej znane zagadnienie atomu wodoru: swobodny elektron, mogący poruszać się w próżni z energią o wartościach od zera do nieskończoności w polu coulombowskim protonu o potencjale typu $1/r$ może znajdować się dodatkowo w stanach związanych o ujemnych energiach zmieniających się skokowo, co prowadzi do występowania znanych serii widmowych. W naszym zagadnieniu potencjał nie jest typu $1/r$, tylko ma kształt prostokątnej studni.

Mimo to wynik rachunków jest podobny: w zależności od rozmiarów studni potencjału pojawia się 0, 1, 2, ... stanów związanych o ściśle dających się obliczyć energiach. Ogólna zasada jest taka, że im mniejsza jest objętość studni, tym mniej stanów związanych studnia zawiera; poniżej pewnej objętości stany związane w ogóle nie występują.

Wysokość bariery potencjału pomiędzy obszarem 1 i obszarem 2 może być regulowana przez stopniowe dodawanie glinu do kryształu GaAs, w wyniku czego powstaje kryształ mieszany GaAlAs. Jest to drugi (obok zmiany szerokości obszaru 2) sposób zmiany objętości studni potencjału, a więc i ilości zawartych w niej stanów dyskretnych.

W naszym przykładzie, przedstawionym na rysunku 6 i omówionym szczegółowo w podpisie tego rysunku, występują dwa stany dyskretnie. Jest to na razie wynik rachunku przeprowadzonego zgodnie z zasadami mechaniki kwantowej.



Rys. 6. Zależność prądu I oraz przewodnictwa elektrycznego dI/dV od napięcia V dla struktury typu 1—2—1. Zaznaczono warunek rezonansowego (a, c) i niezrezonansowego (b) przewodnictwa struktury. Struktura składa się z dwu zewnętrznych warstw $Ga_{0,3}Al_{0,7}As$ o grubości 80 Å każda oraz środkowej warstwy GaAs o grubości 50 Å. Zewnętrznymi elektrodami są warstwy GaAs domieszkowane na poziomie 10^{18} cm^{-3} .

Spróbujmy zmierzyć energię tych stanów posługując się zewnętrznym polem elektrycznym. Jest to metoda bardzo prosta, gdyż w półprzewodnikach wysokość bariery zwykle nie przekracza kilku elektronowoltów. Po przyłożeniu zewnętrznego napięcia otrzymujemy sytuację jak na rysunku 6. Widać, że przy pewnej wartości napięcia może nastąpić uwolnienie elektronu ze studni na skutek rezonansowego tunelowania elektronu z lewego obszaru 1 poprzez stany dyskretnie studni do prawego obszaru 1. Oznacza to, że przy tej wartości napięcia maleje opór elektryczny, czyli rośnie prąd płynący przez warstwę krystaliczną. Dzieje się tak za każdym razem, kiedy związany poziom z obszaru 2 zrównuje się z poziomem przewodnictwa (poziomem Fermiego) elektronów elektrody doprowadzającej w lewym obszarze 1. Zatem, mierząc charakterystykę prądowo-napięciową naszego kryształu możemy wyznaczyć położenia poziomów związanych i porównać z wartościami obliczonymi teoretycznie. Jest to oczywiście niezależny test na precyzję metody hodowli kryształu, gdyż położenie poziomów związanych jest czule na grubość warstwy typu 2. Wyniki doświadczalne przedstawione na rysunku 6 wskazują na dobrą zgodność teorii z doświadczeniem.

Tunelowanie jest efektem kwantowym. Zgodnie z wynikami mechaniki kwantowej elektron może przeniknąć z lewego obszaru 1 do prawego obszaru 1, pomimo że oddziela je, na ogół niedostępny dla elektronów, obszar 2. Przez supersieć może zatem płynąć prąd elektryczny. Tunelowanie rezonansowe następuje za pośrednictwem stanu związanego w obszarze 2 i dlatego jest znacznie bardziej efektywne.

Następnym krokiem jest badanie bardziej rozbudowanych struktur typu 1—2—1—2... o kilkudziesięciu elementach składowych. Są to właśnie supersieci. Mówiąc jakościowo, stany dyskretnie zlokalizowane w każdej z kolejnych studni mogą teraz ze sobą oddziaływać. Innymi słowy, w wyniku zjawiska tunelowania elektrony mogą poruszać się po całej supersieci. Jednocześnie na skutek tego właśnie oddziaływania stanów mamy do czynienia z ich rozszczepianiem, a więc z powstawaniem pasm energetycznych. Jest to dokładna kopia powstawania pasm energetycznych w półprzewodnikach tak, jak wyobrażamy je sobie w modelu ciasnego wiązania. Dzięki technice supersieci można takie powstawanie pasm modelować. Ponieważ analiza charakterystyk prądowo-napięciowych supersieci jest dość skomplikowana na skutek występowania domen przewodnictwa, to ograniczymy się w tym miejscu jedynie do stwierdzenia, że można te dane dobrze zrozumieć ilościowo w oparciu o model przedstawiony powyżej.

Rozwój techniki epitaksji wiązką molekularną był możliwy dzięki wielkim dotacjom firm elektronicznych. Od początku wskazywano na dwa główne obszary, w których można wykorzystać (i częściowo już się wykorzystuje) uzyskane rezultaty. Chodzi tu o wydajne i trwałe struktury elektroluminescencyjne oraz o objętościowe obwody scalone wielkiej skali integracji.

Struktury elektroluminescencyjne mają taki sam stopień komplikacji jak supersieci. Urządzenia te składają się z kilku warstw krystalicznych, których odpowiedni dobór pozwala na wstrzykiwanie i rozpędzanie elektronów, a następnie na ich zderzenia z centrami świecącymi (najczęściej są to jony manganu lub lantanowców) i wreszcie wyprowadzenie światła na zewnątrz. Zasadniczy problem inżynierii tych struktur polega na tym, że w obszarze przyspieszenia elektronów występują silne pola elektryczne o natężeniu rzędu 10^6 V/cm , co po pewnym czasie prowadzi do przebicia tego obszaru i w konsekwencji do zniszczenia urządzenia. Opanowanie tego niekorzystnego zjawiska stało się możliwe dzięki zastosowaniu epitaksji wiązką molekularną przy produkcji warstw elektroluminescencyjnych. Stanowi to istotny przełom technologiczny, gdyż otwiera możliwości używania płaskich i zasilanych niskim napięciem ekranów elektroluminescencyjnych w miejsce niewygodnych lamp oscyloskopowych, a zatem przybliża moment zbudowania płaskiego telewizora kolorowego.

Z punktu widzenia stopnia komplikacji objętościowy obwód scalony jest bardziej wymyślny, gdyż zawiera różne składniki (atomy różnego rodzaju) w obrębie jednej warstwy. Nie to jest jednak zasadniczą przeszkodą dla stosowania omawianej w tym artykule technologii.

Główną przeszkodą stojącą na drodze szerokiego wprowadzenia opisanej metody na skalę przemysłową jest jej stosunkowo wysoki koszt (w porównaniu z innymi metodami hodowli kryształów), spowodowany głównie energochłonnością procesu wytworzenia i utrzymywania wysokiej próżni. Problem ten nie występuje jednakże w przestrzeni kosmicznej, gdzie próżni jest

aż w nadmiarze. Nic więc dziwnego, że epitaksja wiązką molekularną znalazła się na liście badań naukowych, jakie mają być prowadzone w ramach wykorzystania amerykańskiego promu kosmicznego Columbia. Już dzisiaj istnieją podstawy, aby twierdzić, że przy wielkiej skali produkcji korzystniej będzie wystrzelić „fabrykę” w Kosmos niż wytwarzać wysoką próżnię w warunkach ziemskich.

A co wniosła epitaksja wiązką molekularną do fizyki? Oprócz opisanych przedtem wniosków dotyczących modelu ciasnego wiązania oraz sprawdzenia pewnych innych przewidywań kwantowej teorii ciała stałego uzyskano także szereg danych rzucających zupełnie nowe światło na zagadnienie wzrostu kryształów. Ponadto okazało się, że w kryształach uzyskiwanych tą metodą dyfuzja domieszek przebiega znacznie wolniej, niż to ma miejsce w kryształach hodowanych innymi metodami. Brzmi to może mało efektywnie, ale ma zasadnicze znaczenie przy projektowaniu i budowie wszelkich urządzeń elektronicznych (za przykład może tu posłużyć wspomniany wyżej problem trwałości struktur elektroluminescencyjnych). Tego rodzaju wynik eksperymentalny narzuca także konieczność przebudowy podstaw teorii dyfuzji w ciałach stałych. Wreszcie umiejętność hodowli kryształów bardzo czystych i całkowicie pozbawionych defektów otwiera zupełnie nowe możliwości w tych dziedzinach, gdzie elementarne zjawiska fizyczne nie mogły być obserwowane na skutek konkurencji procesów związanych z niedoskonałościami sieci krystalicznej.

ZAKOŃCZENIE

Historia opowiedziana w tym artykule nie ma jeszcze zakończenia. Dopisz ją, i to już wkrótce, fizycy i inżynierowie, a i my wszyscy będziemy w nim w jakimś stopniu uczestniczyć jako odbiorcy powstałych w wyniku tej pracy urządzeń.

A morał? Chyba taki, że nie można wyobrazić sobie rozwoju współczesnej fizyki bez jej dostępu do nowoczesnej techniki — i że tylko taki kontakt prowadzi do narodzin nowoczesnych technologii. Życie dostarcza wielu dowodów, że jest to myśl banalna tylko z pozoru.



Rozwiązanie zadania M 315

Pokażemy jak osiągnąć koszt \$ 45.
 Obliczamy $f_2, f_3, f_4, \dots, f_{26}$ wprost ze wzoru rekurencyjnego (§ 25). Następnie płacimy
 \$ 6 za $f_{48} = f_{24}(f_{23} + f_{25})$,
 \$ 6 za $f_{50} = f_{25}(f_{24} + f_{26})$,
 \$ 1 za $f_{49} = f_{50} - f_{48}$,
 \$ 1 za $f_{51} = f_{49} - f_{50}$,
 \$ 6 za $f_{100} = f_{50}(f_{49} + f_{51})$.



Rozwiązanie zadania F 125.

Istniejące w przewodniku stacjonarne pole elektryczne działa zarówno na elektrony jak i na jony sieci krystalicznej. Sumaryczny pęd uzyskiwany przez elektrony jest równy liczbowo i przeciwnie skierowany niż pęd uzyskiwany przez sieć. Innymi słowy: średnia siła z jaką elektrony oddziałują na jony sieci jest równa sile wywieranej na nią przez pole. Siły te różnią się zwrotami, zatem przewodnik jako całość nie doznaje działania żadnej siły makroskopowej.

$$w - 2 = \frac{1}{2} (s_3 + 2s_4 + 3s_5 + \dots),$$

a więc $2(w - 2)\pi = (s_3 + 2s_4 + 3s_5 + \dots) \cdot \pi$, a prawa strona powyższej równości wyraża właśnie sumę wszystkich kątów płaskich wielościanu. To kończy dowód.

Wielościany możemy sklejać z siatek. Jeżeli rozsypiemy s ścian wielościanu, to otrzymamy s wielokątów płaskich mających łącznie 2k boków (k — liczba krawędzi wyjściowego wielościanu). Aby z tych oddzielnych wielokątów otrzymać siatkę wielościanu, musimy wykonać s - 1 sklejeń. Za każdym sklejeniem ubywają 2 boki. Liczba boków siatki wynosi zatem

$$k' = 2k - 2(s - 1),$$

co w zestawieniu ze wzorem Eulera daje

$$k' = 2(w - 1),$$

a ponieważ liczba boków siatki jest równa liczbie wierzchołków (bo jest tak dla każdego wielokąta), więc

$$w' = 2(w - 1).$$

Otrzymaliśmy zależność między liczbą w wierzchołków wielościanu a liczbą w' wierzchołków jego siatki.

Krzysztof JERZYK (opr. red.)

Dwa zastosowania wzoru Eulera

Każdemu, kto w szkole uczył się geometrii, znany jest wzór na sumę S kątów wewnętrznych wypukłego wielokąta o n bokach. Ta prosta zależność wyraża się równością

$$S = (n - 2) \cdot \pi.$$

Mало znany jest natomiast analogiczny wzór dla wielościanów, choć wiedział o nim już Kartezjusz. Mianowicie suma wszystkich kątów płaskich dowolnego wielościanu wypukłego o w wierzchołkach jest równa

$$S' = (w - 2) \cdot 2\pi.$$

Na przykład dla sześcianu mamy $w = 8, S' = 6 \cdot 2\pi = 12\pi$, a powiedzmy, dla dwunastościanu foremego $S' = 36\pi$. Dla dowodu powyższej zależności przyjmijmy, że nasz wielościan ma w wierzchołków, s_3 ścian trójkątnych, s_4 ścian czworokątnych, s_5 pięciokątnych itd. Ma on zatem $s_3 + s_4 + s_5 + \dots$ ścian i $\frac{1}{2} (3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots)$ krawędzi. Zatem (wzór Eulera)

$$w + (s_3 + s_4 + s_5 + \dots) = \frac{1}{2} (3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots) + 2,$$

skąd po łatwych rachunkach