

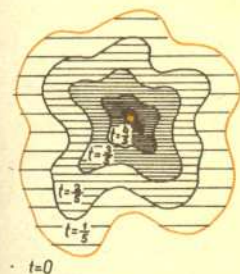
Z powyższego wynika już, że stany charakteryzujące się jednorodnym rozkładem gęstości są wyróżnione i układ prawie przez cały czas będzie znajdował się w takich stanach. Odnosi się to nie tylko do rozważanego przez nas specyficznego rozkładu początkowego. Cechę tę mają wszystkie rozkłady, dla których całkowita liczba cząstek o określonej energii jest taka sama dla wszystkich energii. Jest to istotny warunek, ponieważ brak jest w naszym modelu mechanizmu wyrównującego energię.

Stan odpowiadający jednorodnej gęstości w przestrzeni fazowej nazywa się stanem równowagi. Proces dążenia do stanu równowagi nazywamy relaksacją układu. W omawianym przypadku jest to relaksacja przez mechanizm mieszania faz.

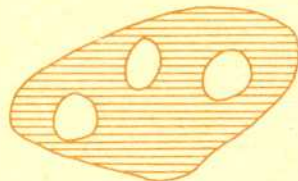
W układach cząstek oddziałujących ze sobą poza mechanizmem mieszania faz istnieje drugi, w wielu przypadkach dominujący, mechanizm relaksacji zderzeniowej. Mechanizm ten prowadzi także do relaksacji energii, ponieważ podczas oddziaływania dwu cząstek następuje przekazanie energii i pędu. Zmiany energii i pędu podczas zderzenia mogą być przy tym bardzo gwałtowne, jak np. w zderzeniach kul bilardowych. Zauważmy, że wartość przekazu silnie zależy od parametru zderzenia. Z tego powodu kula bilardowa po niewielu zderzeniach „zapomina” o swoim stanie początkowym, co oznacza, że układ osiągnął stan równowagi. W gazie składającym się z atomów helu w warunkach normalnych czas relaksacji zderzeniowej wynosi około 10^{-9} s. Tak więc praktycznie rzecz biorąc mamy zawsze do czynienia z gazem zrelaksowanym, znajdującym się (lokalnie) w stanie równowagi termodynamicznej.

Relaksacja przez mieszanie faz odgrywa decydującą rolę w procesie relaksacji tzw. gromad kulistych gwiazd, a także w niektórych procesach zachodzących w plazmie.

Rys. 4



Przestrzeń ściągalna



Przestrzeń nieściągalna

Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Z wyznaczników 2×2 , których wyrazami są tylko 0 i 1, największą wartość ma $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ (oraz $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$). Wyznaczniki 3×3 złożone z zer i jedynek mogą przyjmować różne wartości, z których największą jest 2.

I oto proste zadanie: jaka jest największa wartość wyznacznika $n \times n$, którego wyrazami są tylko 0 i 1? „Proste” nie znaczy „łatwe”. Dla $n = 4$ można jeszcze wszystko wyliczyć i odpowiedź brzmi: 3, dla $n = 5$ jest 5, dla $n = 6$ jest 9, dla $n = 7$ — 32, ale odpowiedź ogólna nie jest znana, choć problem jest stary. W 1893 roku Hadamard próbował go rozwiązać w wersji ogólniejszej: znaleźć największą wartość wyznacznika $n \times n$, którego elementami są liczby o module nie większym niż 1. W 1942 roku Wilkinson wykazał, że oba te zadania są równoważne. Obszerną literaturę do problemu można znaleźć w pracy K. Florka w *Colloquium Mathematicum* z 1963 roku.

Zadanie ma przejrzystą treść geometryczną. Z $n+1$ wierzchołków n -wymiarowej kostki (kwadratu, sześcianu, ...) tworzymy sympleks (trójkąt, czworościan, ...). Jak wielka może być jego n -wymiarowa miara (pole, objętość, ...)?

Odnotujemy, że w 1980 roku rozwiązano pięćdziesięcioletni problem van der Waerdena o permanentach. *Permanent* (brak polskiego terminu)

Ściąganie przestrzeni

W topologii badane są przestrzenie ściągalne. Oto ich definicja.

Mówimy, że X jest zbiorem ściągłym (dokładniej: przestrzenią ściągłą), gdy jest takie przekształcenie ciągłe

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow X,$$

że dla każdego $x \in X$ mamy

$$F(x, 0) = x$$

$$F(x, 1) = x_0 = \text{const.}$$

Czy to można zrozumieć? Oczywiście że tak, ale chyba tylko w ten sposób: Interpretujemy parametr $t \in [0, 1]$ jako czas. Wówczas możemy powiedzieć, że przestrzeń jest ściągła, gdy istnieje ciągłe przejście w czasie od przekształcenia tożsamościowego (w chwili $t = 0$) do przekształcenia „wszystko w jeden punkt” (w chwili $t = 1$).

określamy podobnie jak wyznacznik, z tym tylko, że wszystkie iloczynny odpowiednich wyrazów brane są ze znakiem + nie zaś, jak przy wyznaczniku, ze znakiem zależnym od permutacji numerów wierszy. I tak

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_0 a_3 + a_1 a_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{21} a_{12} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{32} a_{23},$$

itd.

Hipoteza van der Waerdena mówiła, że

$$\text{per } A \geq n!/n^n$$

dla dowolnej macierzy o nieujemnych wyrazach i mającej tę własność, że suma elementów każdego wiersza i każdej kolumny wynosi 1. Ponadto, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie wyrazy są równe $1/n$.

Permanentów używa się w kombinatoryce, a poza matematyką np. w chemii fizycznej. Rozwiązanie problemu van der Waerdena przyszło właśnie ze strony fizyków. Przeglądając stare prace Aleksandrowa fizyka radzieckiego G. P. Jegoryczew natknął się na nierówność związaną z permanentami stanowiącą kluczowy krok w późniejszym dowodzie. Gdyby nie to, że napisana po rosyjsku praca Aleksandrowa była nieznaną szerszemu kręgowi odbiorców, hipoteza van der Waerdena zostałaby z pewnością udowodniona znacznie wcześniej.