Stałe i zmienne

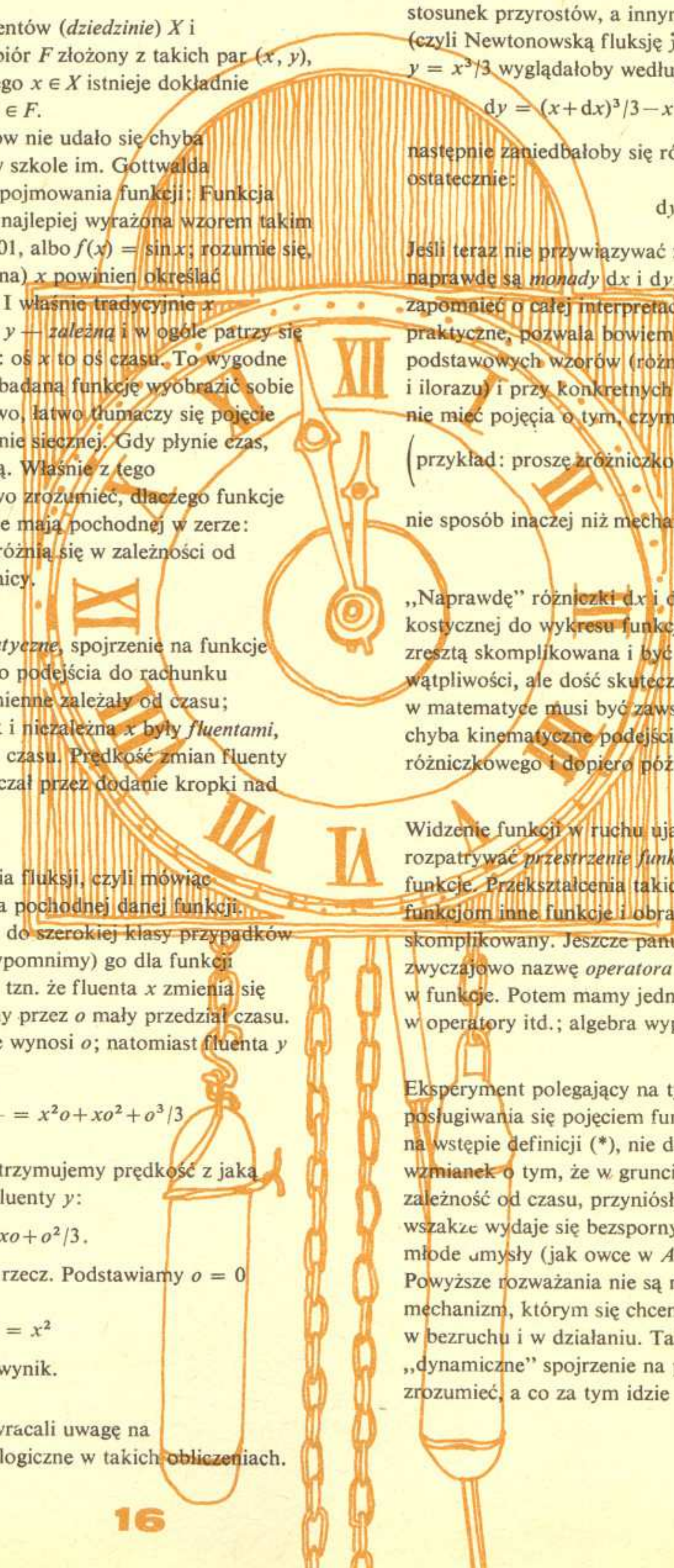
Co to jest funkcja? Każdy umie sformułować jakąś definicję, a obecnie w szkołach podaje się następującą:

Funkcją nazywamy przyporządkowanie elementom zbioru argumentów X elementów zbioru wartości Y w ten sposób, że danemu $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden $y \in Y$.

Czasami mówi się o sformalizowanej do końca wersji powyższego określenia:

(*) Funkcja o zbiorze argumentów (*dziedzinie*) X i i *przeciwdziedzinie* Y to zbiór F złożony z takich par (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden $y \in Y$ taki, że $(x, y) \in F$.

Mimo tych wysiłków teoretyków nie udało się chyba (z wyjątkiem niektórych klas w szkole im. Gottwalda w Warszawie) zabić zdrowego pojmowania funkcji: Funkcja (jednej zmiennej) to *zależność*, najlepiej wyrażona wzorem takim jak $f(x) = x^5+4x^3+34x^2+1001$, albo $f(x) = \sin x$; rozumie się, że argument (zmienna niezależna) x powinien określać wartość funkcji jednoznacznie. I właśnie tradycyjnie x nazywa się *zmienną niezależną*, y — *zależną* i w ogóle patrzy się na to wszystko „dynamicznie": oś x to oś czasu. To wygodne i bardziej efektywne: możemy badaną funkcję wyobrazić sobie i badać w „ruchu". Przykładowo, łatwo tłumaczy się pojęcie stycznej — to graniczne położenie siecznej. Gdy płynie czas, to sieczna przechodzi w styczną. Właśnie z tego nieprecyzyjnego określenia łatwo zrozumieć, dlaczego funkcje takie jak $y = |x|$, $y = |\sin x|$ nie mają pochodnej w zerze: graniczne położenie siecznych różni się w zależności od sposobu przechodzenia do granicy.



Dynamiczne, lub raczej *kinematyczne*, spojrzenie na funkcje leży u podstaw newtonowskiego podejścia do rachunku różniczkowego. U Newtona zmienne zależały od czasu; zarówno zmienna zależna y jak i niezależna x były *fluentami*, tzn. wielkościami zależnymi od czasu. Prędkość zmian fluenty nazywał Newton *fluksją* i oznaczał przez dodanie kropki nad symbolem fluenty.

Newton podał sposób obliczania fluksji, czyli mówiąc dzisiejszym językiem, obliczania pochodnej danej funkcji. Sposób ten daje się zastosować do szerokiej klasy przypadków i przedstawimy (czy raczej przypomnimy) go dla funkcji $y = x^3/3$. Założymy, że $\dot{x} = 1$, tzn. że fluenta x zmienia się jednostajnie w czasie. Oznaczmy przez o mały przedział czasu. Przyrost fluenty x w tym czasie wynosi o; natomiast fluenta y wzrasta o

$$\frac{(x+o)^3}{3} - \frac{x^3}{3} = x^2o+xo^2+o^3/3$$

i po podzieleniu przez czas o otrzymujemy prędkość z jaką dokonała się zmiana wartości fluenty y:

$$x^2+xo+o^2/3.$$

Teraz następuje najdziwniejsza rzecz. Podstawiamy $o = 0$ i otrzymujemy

$$\dot{y} = x^2$$

a więc, jak wiemy prawidłowy wynik.

Krytycy Newtona wiele razy zwracali uwagę na niekonsekwencje i wręcz błędy logiczne w takich obliczeniach. Czy o jest zerem? Jeśli tak, to nie można dzielić przez o, jeśli nie, to dlaczego przyjmujemy w końcu, że jest równe zeru? Czyżby wyniki były tylko przybliżone? Dziś wiemy, że wyniki są dobre, a metoda jest zupełnie ścisła, trzeba tylko zadbać o precyzję definicji. Wystarczy powiedzieć: przechodzimy do granicy z o.

Inaczej spojrzał na różniczkowanie funkcji Leibniz. Wprowadził on dość niejasne symbole dx i dy, tłumacząc je mniej więcej tak: dx to *przyrost czasu*, załóżmy, że od x do $x+dx$ prędkość zmian funkcji nie zmienia się — ten hipotetyczny przyrost funkcji od x do $x+dx$ to właśnie dy. Stosunek różniczek dy/dx to pochodna funkcji. Na „ułamek" dy/dx patrzył Leibniz dwojako: raz interpretował go jako stosunek przyrostów, a innym razem jako prędkość chwilową (czyli Newtonowską fluksję $\dot{y}$). Obliczenie różniczki funkcji $y = x^3/3$ wyglądałoby według Leibniza tak:

$$dy = (x+dx)^3/3-x^3/3 = x^2dx+x(dx)^2-(dx)^3/3,$$

następnie zaniedbałoby się różniczki wyższych potęg, ostatecznie:

$$dy = x^2dx.$$

Jeśli teraz nie przywiązywać znaczenia do tego, czym naprawdę są *monady* dx i dy, to można z powodzeniem zapomnieć o całej interpretacji kinematycznej. Podejście to jest praktyczne, pozwala bowiem na szybkie wyprowadzenie podstawowych wzorów (różniczkowanie sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu) i przy konkretnych obliczeniach możemy rzeczywiście nie mieć pojęcia o tym, czym są naprawdę dx i dy (przykład: proszę zróżniczkować funkcję $y = \dfrac{x\sin(x^2+5x+6)+e^x}{7x^5+19\cos 3x+1/x}$; nie sposób inaczej niż mechanicznie).

„Naprawdę" różniczki dx i dy są elementami przestrzeni kostycznej do wykresu funkcji: dokładna formalizacja nie jest zresztą skomplikowana i być może usuwa filozoficzne wątpliwości, ale dość skutecznie zabija intuicję. Formalizacja w matematyce musi być zawsze wtórna, *dlatego* niezbędne jest chyba kinematyczne podejście do podstaw rachunku różniczkowego i dopiero późniejsza jego algebraizacja.

Widzenie funkcji w ruchu ujawnia swoje wady, gdy zaczynamy rozpatrywać *przestrzenie funkcyjne*, tzn. których elementami są funkcje. Przekształcenia takich przestrzeni przyporządkowują funkcjom inne funkcje i obraz kinematyczny jest już dość skomplikowany. Jeszcze panujemy nad nim, nadając zwyczajowo nazwę *operatora* dla przekształceń funkcji w funkcje. Potem mamy jednak przekształcenia operatorów w operatory itd.; algebra wypiera wyobraźnię.

Eksperyment polegający na tym, by uczniów wyuczyć posługiwania się pojęciem funkcji wyłącznie według przytoczonej na wstępie definicji (*), nie dopuszczając jakichkolwiek wzmianek o tym, że w gruncie rzeczy funkcja to prosta zależność od czasu, przyniósłby ciekawe rezultaty. Jeden wynik wszakże wydaje się bezsporny: zepsulibyśmy nie do naprawienia młode umysły (jak owce w *Animal Farm*).
Powyższe rozważania nie są może zbyt głębokie: każdy mechanizm, którym się chcemy posługiwać, powinniśmy poznać w bezruchu i w działaniu. Tak jest i z matematyką: często „dynamiczne" spojrzenie na problem pozwala go lepiej zrozumieć, a co za tym idzie — rozwiązać.

Michał SZUREK