Zadania

Wenus z Willendorf.

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 304. Niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie dowolnym ciągiem złożonym z liczb $+1$, -1 i niech $f_1 = e_1$, $f_i = \dfrac{e_i}{e_{i-1}}$ dla $i = 2, \ldots, n$. Wykazać, że

$$(*) \qquad \sin\left(\left(e_1 + \frac{e_2}{2} + \frac{e_3}{4} + \ldots + \frac{e_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} f_1 \sqrt{2 + f_2\sqrt{2 + \ldots + f_n\sqrt{2}}}.$$

Rozwiązanie na str. 4

M 305. Trójkąt ABC porusza się po płaszczyźnie tak, że proste AB i BC są styczne do dwóch ustalonych okręgów. Wykazać, że prosta AC jest również styczna do pewnego stałego okręgu.
Rozwiązanie na str. 2

M 306. Czy istnieją trójki cyfr x, y, z takie, że równość

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xx\ldots\ldots x}}_{2n\text{ cyfr}} - \underbrace{\overline{yy\ldots\ldots y}}_{n\text{ cyfr}}} = \underbrace{\overline{zz\ldots\ldots z}}_{n\text{ cyfr}}$$

zachodzi dla co najmniej dwóch naturalnych wartości n?
Symbol $\overline{abc}$ oznacza liczbę $100a + 10b + c$ itp.
Rozwiązanie na str. 3

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 119. Klocek o masie M spoczywa na chropowatej poziomej płaszczyźnie. Wiedząc, że współczynnik tarcia statycznego między klockiem i powierzchnią wynosi f, znaleźć najmniejszą siłę potrzebną do jego przesunięcia.
Rozwiązanie na str. 5

F 120. Ciało ślizga się po poziomej chropowatej powierzchni. Jak wielką siłę równoległą do płaszczyzny i prostopadłą do prędkości ciała należy przyłożyć, aby nastąpiła zmiana kierunku ruchu?
Rozwiązanie na str. 16

Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Problem, który chcemy przedstawić, dotyczy układu równań

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = y_1^n + y_2^n + \ldots + y_k^n \end{cases}$$

Oczywiście układ ten ma rozwiązania: wystarczy nadać niewiadomym x_1, $x_2, \ldots, x_k$ dowolne wartości, ciąg zaś $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ określić jako dowolną permutację ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Rozwiązanie tak otrzymane nazwiemy trywialnym. Rozwiązania nietrywialne mogą istnieć tylko w przypadku, gdy $k \geqslant n+1$ (w dowodzie wykorzystuje się wzory Newtona z teorii funkcji symetrycznych).

Zauważmy, że jeśli ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ jest rozwiązaniem układu $(*)$, to ciąg $(m+a_1, m+a_2, \ldots, m+a_k, m+b_1, m+b_2, \ldots, m+b_k)$, ($m$ — dowolna liczba) również jest takim rozwiązaniem (w dowodzie wykorzystuje się wzór dwumianowy). Wynika stąd, że jeżeli układ $(*)$ ma rozwiązanie, to ma rozwiązanie, w którym $x_1 = 0$. Zachodzi następujące twierdzenie (w dowodzie korzysta się znów z wzoru dwumianowego):

Jeżeli $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ jest rozwiązaniem układu $(*)$, to dla dowolnego d ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1+d, b_2+d, \ldots, b_k+d; b_1, b_2, \ldots, b_k, a_1+d, a_2+d, \ldots, a_k+d)$ jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2k} \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2k}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{2k}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \ldots + x_{2k}^{n+1} = y_1^{n+1} + y_2^{n+1} + \ldots + y_k^{n+1} \end{cases}$$

Interesować nas będzie istnienie rozwiązań nietrywialnych układu $(*)$ w liczbach całkowitych przy możliwie małym k, np. $k = n+1$. Dla $n = 1$, $k = 2$ mamy np. $1+4 = 2+3$; dla $n = 2$, $k = 3$ rozwiązaniem jest np. ciąg $(1, 5, 6; 2, 3, 7)$. Wiadomo, że dla $k = n+1$ rozwiązania istnieją dla $n \leqslant 9$.

Problem. Czy istnieją rozwiązania nietrywialne układu $(*)$ w liczbach całkowitych przy $k = n+1 \geqslant 11$?

Pokażemy teraz możliwy sposób zaatakowania tego problemu przedstawiając sposób otrzymania rozwiązania dla $n = 6$.

Ciąg $(0, 7, 11, 17, 18, 24, 28, 35; 1, 8, 12, 15, 20, 23, 27, 34)$ jest rozwiązaniem układu $(*)$ dla $n = 1$, $k = 8$. Stosując przytoczone powyżej twierdzenie kolejno dla $d = 7, 11, 13, 17, 19$ i redukując równe wartości niewiadomych x_i, y_i dochodzimy do rozwiązania $(0, 18, 27, 58, 64, 89, 101; 1, 13, 38, 44, 75, 84, 102)$. Nasuwa się tu pytanie: z jakiego rozwiązania startować i jakie przyjmować wartości d? Ale to już pytanie dla Czytelników.

Powyższe uwagi sugerują, że rozwiązanie nietrywialne dla $k = n+1 = 11$ istnieje, ale naprawdę tego nie wiadomo. Byłoby interesujące znaleźć choćby rozwiązanie w liczbach całkowitych w przypadku $n = 10$, $k \leqslant 13$; $n = 11$, $k \leqslant 13$; $n = 12$, $k \leqslant 19$; $n = 13$, $k \leqslant 29$.

Powyższy problem łączy się z następującym:

Podać przykład takiego ciągu liczb naturalnych (c_p) szybko rosnącego, że

$\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{c_p}$ jest liczbą wymierną i istnieje liczba całkowita $k \neq 0$, dla której

$\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k+c_p}$ jest też liczbą wymierną.

Otóż jeżeli $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}; b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$ jest rozwiązaniem układu $(*)$ dla $k = n+1$, to można przyjąć $c_p = (p+a_1)(p+a_2)\ldots(p+a_{n+1})$ i wtedy różnica $(p+b_1)(p+b_2)\ldots(p+b_{n+1}) - c_p$ jest liczbą całkowitą k różną od zera, niezależną od p. Ponadto $\dfrac{1}{c_p}$ i $\dfrac{1}{k+c_p}$ są liczbami wymiernymi, co można udowodnić wykorzystując fakt, że $\dfrac{1}{(p+a_1)(p+a_2)\ldots(p+a_{n+1})} =$
$= \dfrac{A_1}{p+a_1} + \dfrac{A_2}{p+a_2} + \ldots + \dfrac{A_{n+1}}{p+a_{n+1}}$, gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ są pewnymi liczbami wymiernymi.

AM