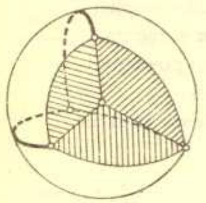
Numery w kwadratowych nawiasach stanowią odnośniki do cytowanej poniżej literatury. Ponad 60 dalszych prac o problemie Borsuka cytuje B. Grünbaum w przeglądowym artykule [5].

Wokół słynnego problemu Borsuka o podziale

Dr Marek LASSAK



Rys. 1

W 1933 r. czasopismo *Fundamenta Mathematicae* opublikowało pracę Karola Borsuka pt. „Trzy twierdzenia o n-wymiarowej sferze euklidesowej" [1]. Jedno z tych twierdzeń można sformułować następująco: najmniejsza liczba części o średnicy mniejszej niż 1, na jaką można podzielić n-wymiarową kulę o średnicy 1, wynosi $n+1$ (rys. 1). Jednocześnie postawione zostało pytanie o zamianę kuli na dowolny zbiór, szeroko obecnie znane jako

Problem Borsuka. Czy każdy zbiór o średnicy 1 leżący w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n da się podzielić na $n+1$ części o średnicach mniejszych od 1?

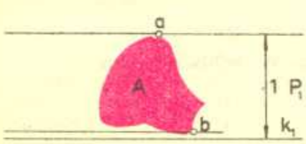
Na pytanie to próbowało odpowiedzieć wielu matematyków. Dla $n = 2$ odpowiedź jest dość prosta, lecz dla $n = 3$ pozytywne rozwiązanie opublikowano dopiero w 1955 r. Dla $n = 4$ odpowiedź nie jest znana do dzisiaj. Podobnie jak i dla innych słynnych problemów znamienna jest tu głęboka przepaść między prostotą pytania a olbrzymimi trudnościami (rachunkowymi, teoretycznymi) w udzieleniu odpowiedzi.

Zadanie. Wykazać, że gdy trójkąt opisany na ograniczonej domkniętej figurze A będziemy „obracać" tak, aby jego kąty były stałe, a boki zawsze podpierały A, to długości tych boków będą się zmieniać w sposób ciągły.

Wiadomo, że średnica zbioru nie zwiększa się, gdy tworzymy jego domknięcie. Wobec tego problem Borsuka wystarczy rozwiązać dla zbiorów domkniętych. W artykule ograniczymy się więc do rozważania jedynie zbiorów domkniętych i, co jest oczywiste, ograniczonych. Jest to o tyle korzystne, że średnica *realizuje się* wtedy dla pewnej pary punktów, tzn. że średnica takiego zbioru równa się maksymalnej odległości jego punktów.

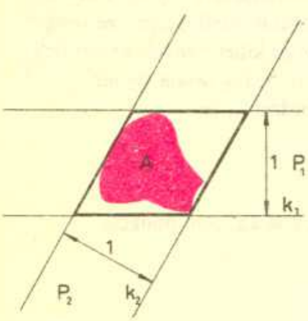
Rozwiązanie dla $n = 2$

Niech A będzie dowolnym zbiorem o średnicy 1. Jak mówiliśmy wcześniej, bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że A jest domknięte. Niech k_1, k_2, k_3 będą trzema kierunkami tworzącymi kąty 60°.



Rys. 2

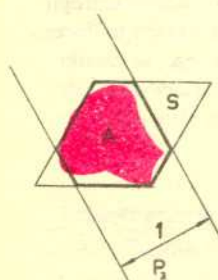
1. Utwórzmy najmniejszy pas o kierunku k_1 zawierający A (rys. 2). Taki pas oczywiście istnieje — jako przekrój wszelkich półpłaszczyzn ograniczonych prostymi równoległymi do k_1 i zawierającymi A. Ponieważ zbiór A jest domknięty i ograniczony, znajdą się w nim takie punkty a oraz b, które leżą na prostych ograniczających ten pas. Ponieważ odległość a i b nie przekracza 1, więc szerokość pasa nie przekracza 1. Z pewnością więc A mieści się w pasie P_1 o szerokości 1 równoległym do k_1.



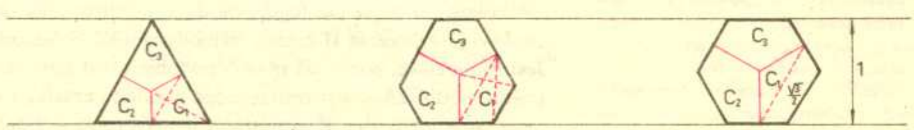
Rys. 3

2. Analogicznie tworzymy pewien pas P_2 o szerokości 1 i kierunku k_2, który zawiera A. Wobec tego A mieści się w części wspólnej pasów P_1 i P_2, czyli rombie o kącie ostrym 60° i odległości przeciwległych boków równej 1 (rys. 3).

3. Tworzymy teraz pewien pas P_3 o szerokości 1 i kierunku k_3 zawierający A (rys. 4). Ponieważ A leży w rombie, można przyjąć, że proste ograniczające P_3 przecinają romb. Oczywiście proste te nie muszą przechodzić w równych odległościach od środka rombu. Tak więc na zbiorze A został opisany sześciokąt S, którego przeciwległe boki są równoległe.



Rys. 4

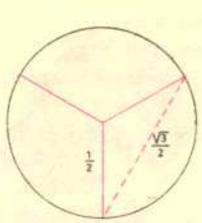


Rys. 5

W skrajnym przypadku S może być trójkątem. Łatwo uzasadnić (np. stosując twierdzenie Talesa), że trzy boki (co drugi) sześciokąta S są równej długości. Sześciokąt S dzielimy na trzy części C_1, C_2, C_3 odcinkami łączącymi jego środek ze środkami dłuższych boków (rys. 5). Gdy S jest sześciokątem foremnym, to jego środek łączymy z co drugim bokiem. W tym ostatnim przypadku średnica każdej części wynosi dokładnie $\sqrt{3}/2$. Gdy zaś nie jest foremny, średnice te są nawet mniejsze od $\sqrt{3}/2$; to zadanie dla Czytelnika.

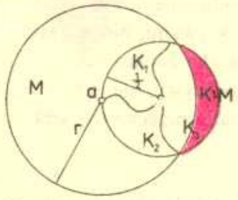
Rys. 6

4. Ponieważ $A \subset S$, więc zbiory $A_1 = A \cap C_1$, $A_2 = A \cap C_2$ i $A_3 = A \cap C_3$ mają średnice nie większe niż $\sqrt{3}/2$ (zob. rys. 6). Oczywiście $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Tym samym istnieje rozbicie dowolnego zbioru $A \subset E^2$ o średnicy 1 na trzy zbiory o średnicach nie większych od $\sqrt{3}/2$.



Rys. 7

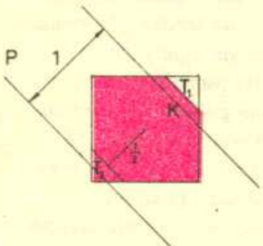
Zauważmy, że otrzymana liczba $\sqrt{3}/2$ nie da się już zmniejszyć. Pokazuje to przykład koła K o średnicy 1 (rys. 7). Przypuśćmy, że K da się podzielić na trzy części K_1, K_2, K_3 o średnicach mniejszych od $\sqrt{3}/2$ (rys. 8). Ponieważ przy domykaniu zbioru nie zwiększa się średnica, K da się pokryć sumą domkniętych zbiorów $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$, $\bar{K}_3$ o średnicach mniejszych od $\sqrt{3}/2$. Oczywiście cały okrąg nie może leżeć całkowicie w jednym z tych zbiorów. Znajdzie się więc taki punkt a okręgu, który należy do dwóch z tych zbiorów, powiedzmy do $\bar{K}_1$ i $\bar{K}_2$. Ponieważ średnice zbiorów $\bar{K}_1$ i $\bar{K}_2$ są mniejsze od $\sqrt{3}/2$, więc $\bar{K}_1$ i $\bar{K}_2$ leżą w kole M o środku a i pewnym promieniu $r < \sqrt{3}/2$. Dlatego $K_3 \supset K \setminus M$. Średnica zbioru $K \setminus M$ powinna być więc mniejsza od $\sqrt{3}/2$. Tymczasem jak można wywnioskować z rys. 8 przekracza ona $\sqrt{3}/2$. **Sprzeczność.**



Rys. 8

Uniwersalne pokrywy

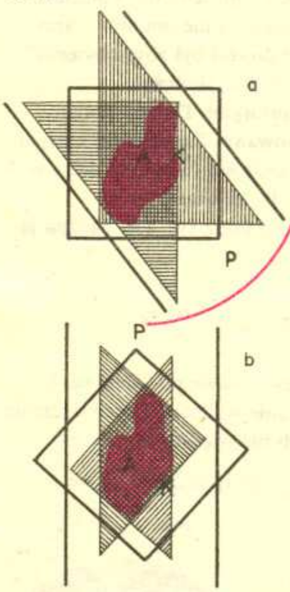
Zbiór U, którym można pokryć dowolny zbiór o średnicy 1 nazwiemy uniwersalną pokrywą. Oczywiście cała płaszczyzna czy też pas o szerokości 1 są uniwersalnymi pokrywami w E^2. Pokrywy te są jednak zbyt duże. Interesują nas uniwersalne pokrywy „małe i zgrabne" w tym sensie, że dadzą się podzielić na 3 (a w przestrzeni E^n na $n+1$) części o średnicach mniejszych od 1. Sześciokąt s uzyskany w dowodzie twierdzenia 1 daje się odpowiednio podzielić, ale nie jest uniwersalną pokrywą — może bowiem przyjmować różne kształty w zależności od zbioru nakrywanego. Romb (rys. 3) występujący w dowodzie poprzedniego twierdzenia, jak zresztą dowolny romb o odległości przeciwległych boków równej 1, jest uniwersalną pokrywą. W szczególności jest nią kwadrat o boku 1. Żaden z takich rombów nie da się jednak podzielić na trzy części o średnicach mniejszych niż 1 (dlaczego?).



Rys. 9

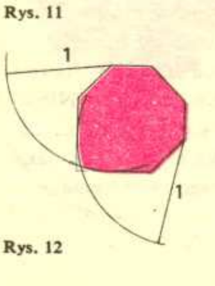

Rys. 10

Czy istnieją więc pokrywy uniwersalne w E^2 dające się podzielić na trzy części o średnicach mniejszych od 1? Okazuje się, że tak. Niech A będzie dowolnym zbiorem o szerokości 1. Nakryjmy go kwadratem o boku 1 oraz pasem o szerokości 1 równoległym do jednej z przekątnych (rys. 9). Zauważmy, że poza zbiorem $K \cap P$ pozostaje przynajmniej jeden z trójkątów T_1, T_2 wyciętych z kwadratu K prostymi równoległymi do pasa i przechodzącymi w odległości 1/2 od środka kwadratu. Powstały pięciokąt (rys. 10) jest uniwersalną pokrywą. Rysunek wskazuje rozbicie tego pięciokąta na trzy części o średnicach mniejszych od 1. Podana konstrukcja wydaje się być najprostszym uzasadnieniem pozytywnej odpowiedzi na problem Borsuka dla $n = 2$. Jest ona jednak gorsza od konstrukcji z punktu 3 w tym sensie, że maksymalna ze średnic podzbiorów zwiększyła się.



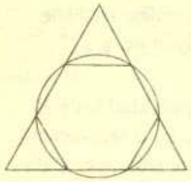
Rys. 11

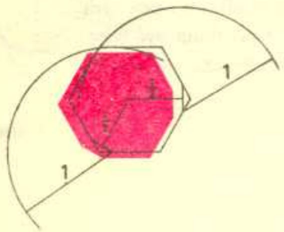
Podobne rozumowanie można powtórzyć dla drugiej przekątnej otrzymując mniejszą uniwersalną pokrywę przez analogiczne obcięcie jednego z sąsiednich rogów. Okazuje się, że kwadrat o boku 1 z obciętymi trzema rogami prostymi równoległymi do przekątnych w odległości 1/2 od środka też jest uniwersalną pokrywą. Aby to wykazać, trzeba się nieco namęczyć. Podamy jedynie wskazówkę — należy kwadrat K wraz z pasem P (z rys. 9) tak przemieszczać, aby oba trójkąty T_1, T_2 znalazły się poza pasem P. Nie unikniemy tu kłopotliwego wykazania ciągłości pewnej funkcji.



Rys. 12

Kwadrat K oraz pas P umieszczamy mianowicie tak, aby pary przeciwległych prostych leżały w równych odległościach od A. Budujemy (rys. 11a) dwa trójkąty prostokątne opisane na A o przeciwprostokątnych równoległych do pasa P i przyprostokątnych równoległych do boków kwadratu K. Przy tych ograniczeniach „obracamy wokół A" kwadrat, pas i trójkąty aż, jak na rys. 11b, te ostatnie staną się przystające (korzystamy tu z wyniku zadania na marginesie). Dzięki symetrii obie proste ograniczające P znajdą się w odległości 1/2 od środka kwadratu. Obcinamy więc dwa przeciwne rogi kwadratu, a następnie, w wiadomy sposób, jeszcze jeden z dwu pozostałych rogów. Co więcej, i ta pokrywa da się zmniejszyć przez obcięcie ostatniego rogu kwadratu dwoma łukami (rys. 12), co Czytelnik bez trudu uzasadni. Nie wiadomo jednak, czy teraz uzyskana pokrywa da się jeszcze zmniejszyć, tzn. czy jest ona minimalna. Zacytujmy w tym miejscu otwarty problem amerykańskiego matematyka Klee: *podać przykład minimalnej uniwersalnej pokrywy dla* $n = 2$.


Rys. 13



Rys. 14

Na uwagę zasługuje pokrywa w kształcie sześciokąta foremnego o odległości przeciwległych boków równej 1 (rys. 5c). Znalazł ją węgierski matematyk Pál. Dowód polega na przemieszczaniu rombu wraz z pasem (rys. 4) aż do położenia, gdy pas odetnie dwa równe trójkąty. Z rezultatu Pála wynika, że uniwersalnymi pokrywami są też trójkąt równoboczny o boku $\sqrt{3}$ oraz koło o promieniu $\sqrt{3}/3$ (zob. rys. 13). Z tej sześciokątnej pokrywy nietrudno uzyskać mniejsze pokrywy przez obcięcie niektórych rogów. Na rys. 14 pokazana jest najmniejsza pod względem pola powierzchni dotychczas znana uniwersalna pokrywa. Przy okazji podajmy klasyczny problem Lebesgue'a: *znaleźć uniwersalną pokrywę o najmniejszym polu.* Mówiąc obrazowo, chodzi o znalezienie najekonomiczniejszej łatki, którą można zaszyć każdą dziurę o średnicy 1. Oczywiście jeżeli znajdzie się rozwiązanie problemu Lebesgue'a, to będzie ono także rozwiązaniem problemu Klee.

A oto kilka przykładów uniwersalnych pokryw w E^3: sześcian o krawędzi 1, kula o promieniu $\sqrt{3/8}$, ośmiościan o odległości 1 między parami przeciwległych ścian. W odróżnieniu od przypadku sześcianu, dowód, że dwa ostatnie zbiory są uniwersalnymi pokrywami, nie jest taki łatwy. Pokrywa w formie kuli została podana przez niemieckiego matematyka Junga, zaś ośmiościenna przez geometrę amerykańskiego Gale'a. Gdy mamy już te pokrywy, nie jest trudno konstruować następne (rys. 15) odcinając pewne części płaszczyznami przechodzącymi w odległości 1/2 od środków tych pokryw.

Taką samą metodą jak obcinaliśmy jeden róg kwadratu (rys. 9), obcinamy mały ostrosłup przy jednym z wierzchołków pokrywy ośmiościennej za pomocą płaszczyzny prostopadłej do odcinka łączącego dwa przeciwległe wierzchołki i przechodzącej w odległości 1/2 od środka ośmiościanu. Analogicznie obcinamy jeszcze dwa małe ostrosłupy — zawsze przy jednym z pary przeciwległych wierzchołków. Zauważmy, że trzy tak obcięte wierzchołki ośmiościanu są wierzchołkami jednej z trójkątnych ścian. Dlatego uzyskana uniwersalna pokrywa ma kształt jedenastościanu pokazanego na rys. 15f. Dodajmy, że przy konstrukcji pokrywy z rys. 15d trzeba odpowiednio „obracać" sześcianem, aby dały się najpierw wyciąć dwa ostrosłupy przy przeciwległej parze wierzchołków. Podobnie należy postąpić przy konstrukcji pokrywy z rys. 15e. Nie mamy jednak podstaw, aby analogicznie wyciąć parę przeciwległych ostrosłupów z pokrywy ośmiościennej! Czy Czytelnik domyśla się dlaczego?

Rozwiązanie dla $n = 3$

zaanonsował polski matematyk Perkal w krótkiej notatce [10] w pierwszym numerze *Colloquium Mathematicum.* Z notatki tej wynika, że przedstawił on swój dowód na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego we Wrocławiu w 1947 r. Ciekawe dlaczego nie opublikowano tego dowodu; czy autor lub redakcja nie docenili jego wagi, czy też dowód był zbyt obszerny? Dopiero w 1955 r. angielski matematyk Eggleston opublikował [3] dowód słuszności przypuszczenia Borsuka dla $n = 3$. Jemu też zwykle przypisuje się priorytet. Dowód podany przez Egglestona liczył kilkanaście stron druku i był dość skomplikowany. Zasadzał się na tym samym pomyśle, co pomysł Perkala. W 1957 r. proste rozwiązanie problemu Borsuka dla $n = 3$ podali niezależnie Amerykanin Grünbaum [4] i Węgier Heppes [6]. Rozwiązanie to wykorzystuje przestrzenną uniwersalną pokrywę w formie jedenastościanu z rys. 15f. Można ją rozbić na cztery części (rys. 16) o średnicach

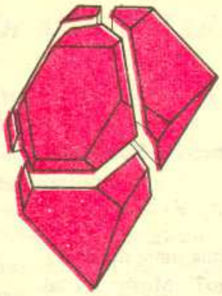
$$\frac{\sqrt{6\,129\,030-937\,419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}} \approx 0{,}9887.$$

Nikt nie wykazał dotychczas, że każdy przestrzenny zbiór o średnicy 1 da się podzielić na 4 części o średnicach mniejszych od tej liczby. Kilku autorów niezależnie wysunęło przypuszczenie, że każdy zbiór o średnicy 1 da się podzielić na 4 części o średnicach nie większych niż $\sqrt{(3+\sqrt{3})/6} \approx 0{,}888$. Liczba ta — to minimalna średnica czterech części, na które da się podzielić kula o średnicy 1 (rys. 1).

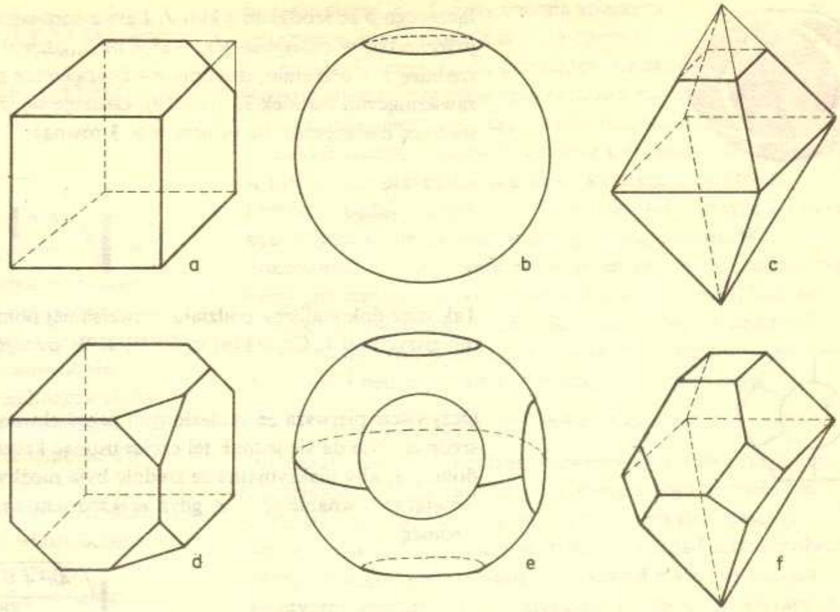
Co wiemy o podziale w E^n?

Jak już wspomnieliśmy, dla $n \geqslant 4$ problem Borsuka pozostaje otwarty. Nie ma też na razie widoków na jego rozstrzygnięcie. Realnym natomiast wydaje się coraz lepsze szacowanie liczby części o średnicach mniejszych od 1, na które można podzielić każdy zbiór o średnicy 1. Niech $k(n)$ będzie najmniejszą liczbą k o tej własności, że każdy zbiór o średnicy 1 leżący w E^n da się podzielić na k części o średnicach mniejszych od 1. A więc problem Borsuka to nic innego jak pytanie, czy $k(n) = n+1$? Oczywiście $k(n) \geqslant n+1$. Wynika to np. z podanego twierdzenia

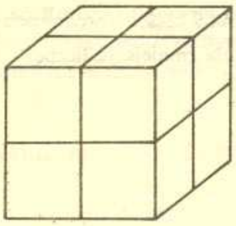
J. Lipchitz – spoczywająca kobieta z gitarą, granit, 1928.



Rys. 16



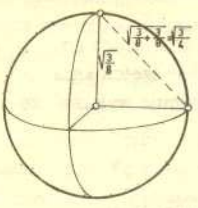
Rys. 15



Rys. 17

Borsuka o kuli. Innego, zupełnie elementarnego uzasadnienia dostarcza przykład n-wymiarowego sympleksu o krawędzi 1. Jeżeli podzielimy ten sympleks na mniej niż $n+1$ części, to co najmniej jedna z nich (zawierając co najmniej dwa spośród $n+1$ wierzchołków sympleksu) będzie miała średnicę 1.

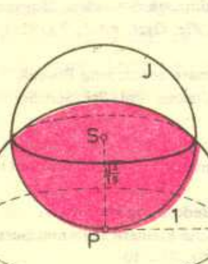
Niemiecki matematyk Lenz zauważył [8], że $k(n) \leqslant q_n^n$, gdzie q_n oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą od $\sqrt{n}$. Oszacowanie to wynika z podziału n-wymiarowej uniwersalnej pokrywy w postaci n-kostki o krawędzi 1 na n-kostki o średnicach mniejszych od 1. Zwykły trójwymiarowy sześcian, tj. 3-kostkę o krawędzi 1, da się podzielić na 8 sześcianów o średnicach $\sqrt{3}/2 < 1$, (rys. 17). Analogiczne rozbicie 4-kostki o krawędzi 1 na szesnaście 4-kostek o krawędziach 1/2 nie jest dobre — mają one średnice $\sqrt{4 \cdot 1/4} = 1$. Niezbędne jest rozbicie na $3^4 = 81$ mniejszych 4-kostek o krawędziach 1/3, a więc średnicach $\sqrt{4 \cdot 1/9} = 2/3$. Liczba 81 części dość mocno odbiega od liczby 5 części oczekiwanej przez Borsuka dla przestrzeni E^4. Sytuacja jeszcze bardziej pogarsza się ze wzrostem wymiaru n. Przyczyną tego jest rosnąca średnica n-kostki o krawędzi 1 (wiadomo, że w kostce o krawędzi 1 cm można zmieścić słonia ... o ile tylko weźmiemy dostatecznie duży wymiar).



Rys. 18

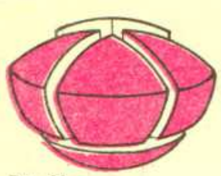
W 1978 r. Borsuk pokazał [2], że $k(n) \leqslant m_1 \dots m_n$, o ile tylko $\sum_{i=1}^{n} m_i^{-2} < 1$. Oszacowanie to można wyrazić w formie jawnie zależnej od n. Mianowicie $k(n) \leqslant q_n^{n-s_n} (q_n-1)^{s_n}$, gdzie s_n oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą niż $(q_n^n - n)(q_n-1)^2 (2q_n-1)^{-1}$. Teraz wyraźnie widać, że jest to ulepszenie oszacowania Lenza. W szczególności $k(4) \leqslant 24$. Zamiast podziału na n-kostki o krawędziach $1/q_n$ mamy tu podział na n-prostopadłościany o krawędziach $1/q_n$ oraz $1/(q_n-1)$. Np. dla $n = 4$ mamy $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ czterowymiarowe prostopadłościany o odległościach przeciwległych ścian 1/2, 1/2, 1/2, 1/3, a więc o średnicach $\sqrt{(1/2)^2+(1/2)^2+(1/2)^2+(1/3)^2} = \sqrt{31/36} < 1$.

Autorowi udało się znaleźć dwa proste ulepszenia tych oszacowań [7]. Opierają się one na znanym twierdzeniu Junga, że każdy zbiór przestrzeni E^n mający średnicę 1 mieści się w kuli J tej przestrzeni o promieniu $r_n = \sqrt{n/(2n+2)}$. Kulę dzielimy n wzajemnie prostopadłymi hiperpłaszczyznami przechodzącymi przez jej środek (rys. 18 przedstawia przypadek $n = 3$). Łatwo sprawdzić, że średnica każdej części wynosi $\sqrt{r_n^2 + r_n^2} = \sqrt{n/(n+1)}$. Ponieważ J jest uniwersalną pokrywą, więc zachodzi oszacowanie $k(n) \leqslant 2^n$. W szczególności $k(4) \leqslant 16$.



Rys. 19

Lepsze oszacowanie otrzymujemy zmniejszając nieco uniwersalną pokrywę J. Zauważmy, że zbiór domknięty o średnicy 1 mieszczący się w J można tak przesunąć, aby pozostał w kuli J i miał jednocześnie punkt wspólny p z jej brzegiem (sferą). Oczywiście zbiór ten mając średnicę 1 mieści się w kuli B o środku p i promieniu 1. W konsekwencji $J \cap B$ jest uniwersalną pokrywą (rys. 19). Podzielimy tę pokrywę na części o średnicach mniejszych od 1. Najpierw odcinamy pewną część wokół punktu p. Możemy tu użyć hiperpłaszczyzny prostopadłej do odcinka

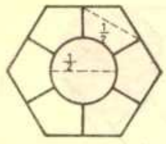


Rys. 20

łączącego p ze środkiem s kuli J. Łatwo sprawdzić, że jeżeli hiperpłaszczyzna będzie przechodzić w odległości $\sqrt{r_n^2-\varepsilon^2/4}$ od s, gdzie $0 < \varepsilon < 1$, to odcięta część będzie miała średnicę ε. Co zostało, dzielimy $n-1$ wzajemnie prostopadłymi hiperpłaszczyznami zawierającymi odcinek $\overline{sp}$ (rys. 19). Okazuje się, że każda z otrzymanych 2^{n-1} części ma średnicę nie większą niż (a przy $n \geqslant 3$ równą)

$$d_\varepsilon = \sqrt{\frac{n+\sqrt{1-\frac{n+1}{2n}\varepsilon^2}}{n+1}} < 1.$$

Tak więc dokonaliśmy podziału uniwersalnej pokrywy $J \cap B$ na $2^{n-1}+1$ części o średnicach mniejszych od 1. Czyli $k(n) \leqslant 2^{n-1}+1$. W szczególności $k(4) \leqslant 9$.

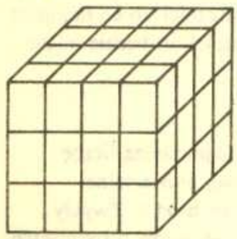


Rys. 21

Oczywiście pierwsza ze znalezionych przed chwilą części może mieć dowolnie małą dodatnią średnicę. Nie da się jednak tej części usunąć kosztem pozostałych (dlaczego?). Można też tak dobrać ε, aby maksymalna ze średnic była możliwie najmniejsza. W tym celu wystarczy rozwiązać równanie $d_\varepsilon = \varepsilon$, gdyż ze wzrostem ε maleje d_ε. Każda z $2^{n-1}+1$ części ma wtedy średnicę

$$\sqrt{\frac{4n^2+\sqrt{8n^2+1}-1}{4n^2+4n}}.$$

Widzimy, że każdy zbiór czterowymiarowy o średnicy 1 da się podzielić na 9 części o średnicach nie większych niż $\sqrt{63+\sqrt{129}/80} \approx 0,964$. Może ktoś z Czytelników zdoła zmniejszyć liczbę lub średnice tych części?



Rys. 22

Rozbicie na części o średnicach co najwyżej λ

W trakcie badania przypuszczenia Borsuka matematycy postawili szereg nowych problemów. Oto jeden z nich. Niech $0 < \lambda < 1$. Podać najmniejszą liczbę części o średnicach co najwyżej λ, na którą da się podzielić każdy zbiór $A \subset E^n$ o średnicy 1. Odpowiedź jest znana tylko dla niektórych λ. Nie wiadomo np. jaka jest najmniejsza liczba części o średnicach co najwyżej 1/3, na którą da się rozbić każdy zbiór $A \subset E^2$ o średnicy 1. Omówimy tu jedynie przypadek $\lambda = 1/2$ zbadany przez Lenzą [9] dla $n = 2$ i oszacowany przez Borsuka [2] dla $n = 3$.

Jedenastokąt foremny o średnicy 1 nie da się rozbić na 6 części o średnicach co najwyżej 1/2.

Każdy zbiór o średnicy 1 leżący na płaszczyźnie można rozbić na 7 części o średnicach co najwyżej 1/2. Wynika to z pokazanego na rys. 21 rozbicia pokrywy w kształcie sześciokąta foremnego o odległości przeciwległych boków równej 1. Może Czytelnik spróbuje wykazać, że liczby 7 części nie da się już zmniejszyć. Odpowiedź na marginesie.

Irena Sladek wykazała w swej pracy magisterskiej obronionej w czerwcu 1981, że każdy zbiór $A \subset E^3$ o średnicy < 1 daje się rozbić na 36 zbiorów o średnicy $< 1/2$. (*Red.*).

Dla $n = 3$ najmniejsza liczba części o średnicach co najwyżej 1/2 nie jest znana. Wiemy jedynie, że każdy zbiór o średnicy 1 da się podzielić na 48 części o średnicach $\sqrt{34}/12 < 1/2$. Pomysł polega na rozbiciu uniwersalnej pokrywy w formie sześcianu o krawędzi 1 na 48 prostopadłościanów (rys. 22). Wydaje się, że to oszacowanie da się jeszcze ulepszyć.

Bibliografia

[1] K. Borsuk, Drei Sätze über die *n*-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, 20(1933), str. 177—190.

[2] K. Borsuk, Some remarks on covering of bounded subsets of the Euclidean *n*-space with sets of smaller diameter, *Demonstratio Math.*, 11 (1978), str. 247—251.

[3] H. G. Eggleston, Covering a three dimensional set with sets of smaller diameter, *J. London Math. Soc.* 30(1955), str. 11—24.

[4] B. Grünbaum, A simple proof of Borsuk conjecture in three dimensions, *Proc. Cambridge Philos.* Soc., 53 (1957), str. 776—778.

[5] B. Grünbaum, Borsuk problem and related questions, *Proc. of the Seventh Symp. in Pure Math. of the Amer. Math. Soc.*, 1963, str. 271—284.

[6] A. Heppes, Térbeli ponthalmazok feleosztása kisebb atmérögü részhalmazok összegére, *Magyar tudományos akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, 7 (1957), str. 413—416.

[7] M. Lassak, An estimate concerning Borsuk partition problem, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. w druku

[8] H. Lenz, Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers, *Archiv Math.* 6 (1955), str. 413—416.

[9] H. Lenz, Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleinere Durchmessers, *Archiv Math.* 7 (1956), str. 33—40.

[10] J. Perkal, Sur la subdivision des ensembles en parties de diametre inférieur, *Colloq. Math.* 1 (1947), str. 45.

Canowa, Paulina Borgese, XIX w.