$\sqrt[\otimes]{\mathfrak{f}!} = 44$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkic rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwoch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce,) można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$3-4\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numoru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czksie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana go ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Klub 44

Zadania nr 28, 29, 30

Termin nadsyłania rozwiązań: 30.XI.1982

28. Dla dowolnej liczby naturalnej $x > 1$ oznaczmy przez $f(x)$ sumę jej czynników pierwszych liczonych z krotnościami, powiększoną o jedynkę:

$$x = \prod p_i^{\alpha_i} \quad f(x) = 1+\sum \alpha_i p_i,$$

Wybierając dowolnie x_o określamy ciąg iteracji wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = f(x_n)$. Jakie liczby mogą wystąpić w ciągu $\{x_n\}$ nieskończenie wiele razy?

29. Przedstawić kwadrat w postaci sumy skończonej liczby trójkątów ostrokątnych o rozłącznych wnętrzach. Rozwiązanie będzie uważane za tym lepsze, im mniejsza będzie liczba trójkątów.

30. Czy dla każdej liczby naturalnej n istnieją dwie funkcje wypukłe określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$, których wykresy mają dokładnie n punktów wspólnych? Czy stnieją dwie funkcje wypukłe określone na $\boldsymbol{R}$, nie identyczne w żadnym przedziale, których wykresy mają nieskończenie wiele punktów wspólnych?

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadanie **30** przysłał nasz Czytelnik pan Andrzej Zieliński z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 4/1982

22. Ciąg $\{2^n\}$ rozbijamy na bloki złożone z liczb jedno-, dwu-, trzycyfrowych itd.: $B_1 = \{2, 4, 8\}$, $B_2 = \{16, 32, 64\}$, $B_3 = \{128, 256, 512\}, \dots$. W każdym bloku B_m $(m > 1)$ początkowa liczba — i tylko ona — zaczyna się od jedynki. Zatem gdy $2^n \in B_m$ czyli gdy $10^{m-1} < 2^n < 10^m$, to $j(n) = m-1 = [n \log 2]$, skąd $\lim j(n)/n = \log 2$.

23. Z założenia zadania łatwo wynika, że przekątne pięciokąta są równoległe do odpowiednich boków. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BE. Czworokąt $CDEM$ jest równoległobokiem; trójkąty ECD CEM są przystające, a trójkąt ABM jest do nich podobny. Oznaczmy skalę podobieństwa przez $s : s = AM/CM = BM/EM$. Pole trójkąta ABM równa się s^2. Pole S pięciokąta $ABCDE$ równa się sumie pól trójkątów ECD, CEM, ABC, ABE minus pole $ABM : S = 4-s^2$. Z równości

$$1 = \frac{AM}{AC}\cdot\frac{AC}{AM} = \frac{\text{pole } \Delta\, ABM}{\text{pole } \Delta\, ABC}\cdot\frac{AM+CM}{AM} = s^2\left(1+\frac{1}{s}\right) = s^2+s$$

obliczamy $s = (\sqrt{5}-1)/2$. Tak więc pole S jest wyznaczone jednoznacznie i równa się $S = 4-s^2 = (5+\sqrt{5})/2$.

Pięciokąt $ABCDE$ nie musi być foremny: każdy pięciokąt otrzymany z foremnego przez przekształcenie afiniczne (nie zmieniające pól) spełnia warunek zadania.

24. Niech $100 = \sum x_i$, $x_i \in N$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, będzie szukanym rozkładem. Zauważmy najpierw, że $x_1 = 2$ lub $x_1 = 3$ (gdyby było $x_1 = 1$ lub $x_1 \geqslant 4$, to przyjmując — odpowiednio w pierwszym oraz drugim przypadku —

$$\begin{array}{lcl} y_1 = x_2 & & z_1 = 2 \\ \dots\dots\dots & & z_2 = x_1-2 \\ y_{n-2} = x_{n-1} & \text{oraz} & z_3 = x_2-2 \\ y_{n-1} = 1+x_n & & z_4 = x_3 \\ & & \dots\dots\dots \\ & & z_{n+1} = x_n \end{array}$$

otrzymujemy $\sum y_i = \sum x_i = 100$, $\prod y_i > \prod x_i$ oraz $\sum z_i = \sum x_i = 100$, $\prod z_i > \prod x_i$, wbrew maksymalności $\prod x_i$). Łatwo sprawdzić, że 100 nie jest sumą kolejnych liczb naturalnych o początkowym składniku równym 2 lub 3, Zatem w przedziale $\langle x_1, x_n\rangle$ istnieje liczba naturalna nie będąca wyrazem ciągu $\{x_1, \dots, x_n\}$. Liczba taka jest tylko jedna: zakładając, że jest ich więcej i oznaczając najmniejszą i największą z nich przez a i b widzimy, że $a-1 = x_j$, $b+1 = x_k$ (dla pewnych j, k); zastępując teraz x_j, x_k przez $x_j' = a$, $x_k' = b$ zwiększamy wartość iloczynu $\prod x_i$ nie zmieniając sumy $\sum x_i$. Tak więc składniki szukanego rozkładu tworzą ciąg postaci

$$\{2, \dots, p-1, p+1, \dots, q\} \quad \text{lub} \quad \{3, \dots, p-1, p+1, \dots, q\}.$$

Suma wyrazów takiego ciągu równa się odpowiednio

$$S = \frac{q(q+1)}{2}-p-1 \quad \text{lub} \quad S = \frac{q(q+1)}{2}-p-3,$$

a ponieważ $2 < p < q$, dostajemy oszacowanie $q^2-q-2 < 2S < q^2+q-2$. Ale $2S = 200$; stąd $q = 14$, tak, że $q(q+1)/2 = 105$ i $S = 104-p$ lub $S = 102-p$ (odpowiednio). Drugą możliwość odrzucamy, bo $p > 2$. Ostatecznie więc $x_1 = 2$, $p = 4$ i rozwiązaniem zadania jest rozkład

$$100 = 2+3+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14; \quad \prod x_i = 21794572800.$$