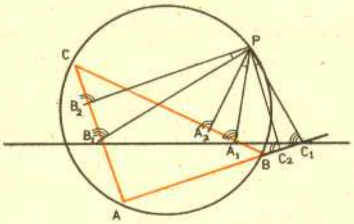
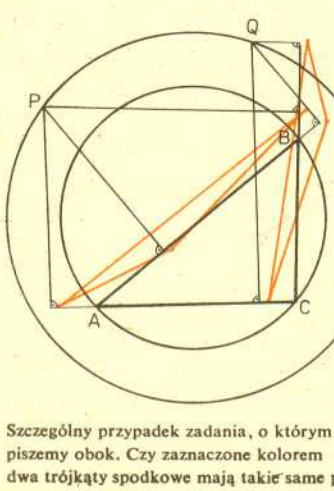
**Rozwiązanie zadania M 302**

Stawiając na każdym z prostokątów pokrywających koło prostopadłościan $a\times 1\times 1$ pokrylibyśmy prostopadłościanami sferę o średnicy 1 stojącą na płaszczyźnie nad środkiem koła. Zauważmy jednak, że prostopadłościan o grubości $a$ wycina ze sfery zbiór zawarty w pewnym pasie (lub wycinku) o wysokości $a$, a więc o powierzchni nie większej niż $a\pi$. Wynika stąd, że do pokrycia sfery potrzeba co najmniej $\left[\frac{\pi}{a\pi}\right]+1=k$ prostopadłościanów, a więc do pokrycia koła potrzeba $k$ prostokątów. Układając $k$ prostokątów obok siebie tak, by pokryły prostokąt $ka\times 1$ zauważymy, że $k$ prostokątów wystarcza do pokrycia koła.



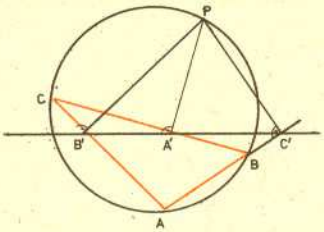

Rys. 8



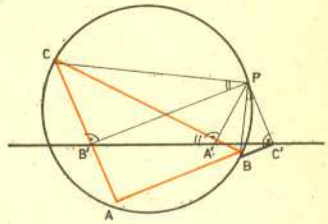

Szczególny przypadek zadania, o którym piszemy obok. Czy zaznaczone kolorem dwa trójkąty spodkowe mają takie same pole?

# Kiedy na czworokącie można opisać okrąg?

*Wtedy i tylko wtedy, gdy suma przeciwległych kątów tego czworokąta jest kątem o rozwartości 180°.*




Rys. 6. Punkty $A'$, $B'$, $C'$ są współliniowe. Przechodząca przez nie prosta nazywa się *linią Simsona* o biegunie $P$.




Rys. 7

Znane. Łatwe. Nie będziemy dowodzić. Będziemy za to z tego korzystać. Niech punkt $P$ leży na okręgu opisanym na trójkącie $ABC$, a niech $C$, $A$ i $B$ będą rzutami prostokątnymi tego punktu na proste $AB$, $BC$, $CA$ (rys. 6). Wykażemy, że punkty $A$, $B$, $C$ są współliniowe. Tu niezbędnych będzie kilka niewielkich rachunków na kątach. Ponieważ na każdym z czworokątów $ACPB$ i $AB'PC'$ można opisać okrąg, więc $\sphericalangle CPB \equiv \sphericalangle B'PC'$ (obydwa dopełniają kąt $\sphericalangle CAB$ do półpełnego). Stąd $\sphericalangle CPB' \equiv \sphericalangle BPC'$. Jednocześnie $\sphericalangle CPB' \equiv \sphericalangle CA'B'$, bo na czworokącie $CPA'B'$ można opisać okrąg, i $\sphericalangle BPC' \equiv \sphericalangle BA'C'$, bo na czworokącie $BA'PC'$ można opisać okrąg (rys. 7). Z trzech ostatnich przystawań otrzymujemy: $\sphericalangle CA'B' \equiv \sphericalangle BA'C'$, a to daje nam:

**Wniosek 3**

Punkty $A'$, $B'$, $C'$ są współliniowe. Odwracając powyższe rozumowanie otrzymujemy natychmiast:

**Wniosek 4**

Jeśli rzuty prostokątne punktu $P$ na proste $AB$, $BC$, $CA$ są współliniowe, to na czworokącie $ABPC$ można opisać okrąg.

Jeśli teraz spojrzymy na **Wniosek 2** i **Wniosek 4**, to... zobaczymy, że nasze zadanie o paraboli rozwiązało się samo. Jeśli ktoś nie lubi, gdy mu się zadania same rozwiązują, proponujemy przeprowadzenie dowodu następującego faktu: Jeżeli punkt $P$ należy do okręgu opisanego na trójkącie $ABC$, a trójkąty $A_1PA_2$, $B_1PB_2$, $C_1PC_2$ są parami podobne (patrz rys. 8), to punkty $A_1$, $B_1$, $C_1$ są współliniowe ($A_2$, $B_2$, $C_2$ zresztą także). Dowód w numerze.

*dr Jerzy BEDNARCZUK*

# Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Niech punkty $A'$, $B'$, $C'$ będą rzutami prostokątnymi punktu $P$ na proste wyznaczone przez boki trójkąta $ABC$. Trójkąt $A'B'C'$ nazywać będziemy *trójkątem spodkowym punktu P* w trójkącie $ABC$. Jeśli punkt $P$ należy do okręgu opisanego na trójkącie $ABC$, to jego trójkąt spodkowy jest trójką punktów współliniowych (rys. 6 przy artykule „Łatwe zadanie o paraboli"). I odwrotnie — jeśli trójkąt spodkowy punktu $P$ jest trójką punktów współliniowych, to punkt $P$ należy do okręgu opisanego na trójkącie $ABC$.

Twierdzenie to można również sformułować w następujący, równoważny sposób: Punkt $P$ należy do okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta spodkowego tego punktu równe jest zero. Dowód tego twierdzenia można znaleźć na przykład we wspomnianym artykule „Łatwe zadanie o paraboli" w tym numerze *Delty*. Jeśli ktoś spróbuje dowieść go samodzielnie, będzie to dobrą rozgrzewką przed przystąpieniem do rozwiązania zadania, z którym my nie umiemy sobie poradzić:
Znaleźć zbiór punktów, dla których trójkąty spodkowe w danym trójkącie $ABC$ mają dane (niekoniecznie zerowe) pole $a$.

*PROOF*