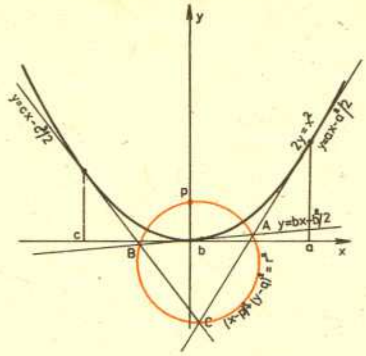
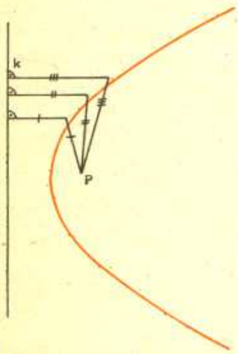
Łatwe zadanie o paraboli

Niech proste AB, BC i CA będą styczne do paraboli. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie ABC przechodzi przez ognisko P tej paraboli (rys. 1).



Rys. 1. Okrąg opisany na trójkącie utworzonym przez styczne do paraboli przechodzi zawsze przez ognisko tej paraboli. Oznaczenia algebraiczne wykorzystuje się w artykule „Parabola, gwiazdki i bilard".

Łatwe czy trudne zadanie? Jeśliby ktoś chciał to wyliczyć, wystarczy napisać równanie tej paraboli w jakimś układzie współrzędnych, równania trzech dowolnych stycznych, obliczyć współrzędne ich punktów przecięcia i jakoś sprawdzić, czy te punkty są współokręgowe z ogniskiem paraboli... chyba jednak nie zachęcamy do tych rachunków.

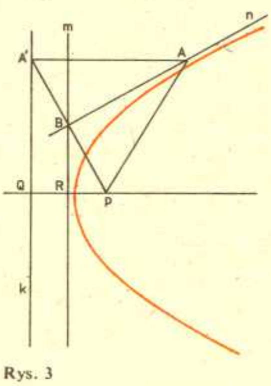


Rys. 2. Własność charakteryzująca parabolę. Zaznaczone odcinki są równej długości.

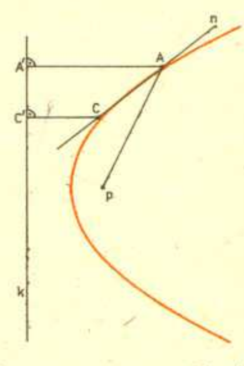
Przyjrzyjmy się uważnie paraboli

Jest to zbiór punktów jednakowo oddalonych od ogniska (punkt P) i kierownicy (prosta k, rys. 2).

Prosta l przechodząca przez ognisko i prostopadła do kierownicy jest osią symetrii paraboli. Przecina ona parabolę w punkcie Q, nazywanym jej wierzchołkiem, a kierownicę w punkcie R. Wierzchołek Q jest oczywiście środkiem odcinka $\overline{PR}$.

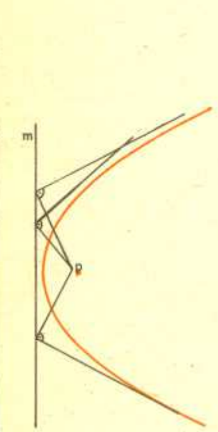


Rys. 3



Rys. 4

Styczna m do paraboli w wierzchołku jest równoległa do kierownicy (rys. 3). Obierzmy teraz na paraboli dowolny punkt A. Niech A' będzie rzutem prostokątnym A na kierownicę, a prosta n dwusieczną kąta $\sphericalangle A'AP$ (rys. 3). Trójkąt $A'AP$ jest równoramienny, więc dwusieczna n kąta przy wierzchołku A przecina podstawę $A'P$ w jej środku B i to pod kątem prostym. Z twierdzenia Talesa wynika, że punkt B należy do prostej m. Przypuśćmy teraz, że prosta n przecina parabolę w jeszcze jednym punkcie C (rys. 4). Niech rzutem prostokątnym C na kierownicę będzie punkt C'. Mielibyśmy wówczas $CP = CC'$ (bo C należy do paraboli) i $CP = CA'$ (bo C leży na wysokości trójkąta równoramiennego $\triangle A'AP$). Byłoby więc $CC' = CA'$, co jest niemożliwe. Otrzymujemy stąd dwa wnioski



ys. 5. Styczne do paraboli.

Wniosek 1

Prosta n jest styczna do paraboli (spójrzmy, jak prostą i elegancką mamy konstrukcję stycznej do paraboli w danym punkcie).

Wniosek 2

Wszystkie rzuty prostokątne ogniska paraboli na styczne do niej leżą na prostej m (rys. 5).