Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Klub 44

Zadania nr 25, 26, 27

Termin nadsyłania rozwiązań: 30.X.82 r.

25. Dla jakich wartości a z przedziału $0 < a < 1$ ciąg $a, a^a, a^{a^a}, a^{a^{a^a}}, \ldots$ jest zbieżny? (por. zadanie 13).

26. Czy czworokąt o przekątnych prostopadłych, opisany na kole, może mieć wszystkie boki różnej długości?

27. Udowodnić, że jeżeli m, n są liczbami naturalnymi takimi, że $\sum_{k=1}^{n} k! = m^2$, to również $\sum_{k=1}^{m} k! = n^2$.

Rozwiązania zadań z numeru 3/1982

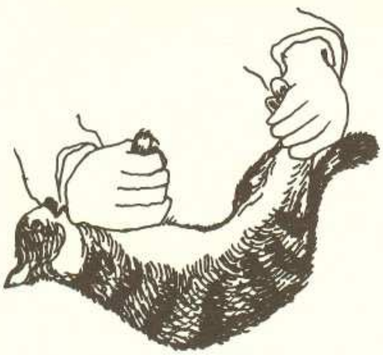
19. Obie strony badanej nierówności — oznaczmy je L i P — są funkcjami parzystymi i 2π-okresowymi, a więc wystarczy ograniczyć się do przedziału $\langle 0, \pi\rangle$. Dla $x \in \langle \pi/2, \pi\rangle$ mamy $L \leqslant 0$, $P > 0$, więc $L < P$. Dla $x = 0$ mamy $L = \sin 1$, $P = 1$, więc $L < P$. Pozostaje do rozpatrzenia przypadek gdy $x \in (0, \pi/2)$. W nierówności $\sin t < t$ (prawdziwej dla $t > 0$) podstawiamy $t = \cos x$ i dostajemy $L < \cos x$, a następnie podstawiamy $t = x$ i stosujemy do obu stron funkcję cosinus (która w rozpatrywanym przedziale jest malejąca); otrzymujemy $P > \cos x$, skąd $L < P$. Zatem nierówność $L < P$ jest spełniona dla wszystkich rzeczywistych wartości x.

20. Dzielimy każdą ścianę na trójkąty łącząc wierzchołki z punktami styczności ścian z kulą wpisaną. Każdemu trójkątowi czerwonemu T_c odpowiada trójkąt zielony T_z, zawarty w sąsiedniej ścianie, mający z trójkątem T_c wspólny bok. Jest to odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna. Odpowiadające sobie trójkąty są przystające, mają więc równe pola, a zatem sumy pól ścian czerwonych i zielonych są równe.

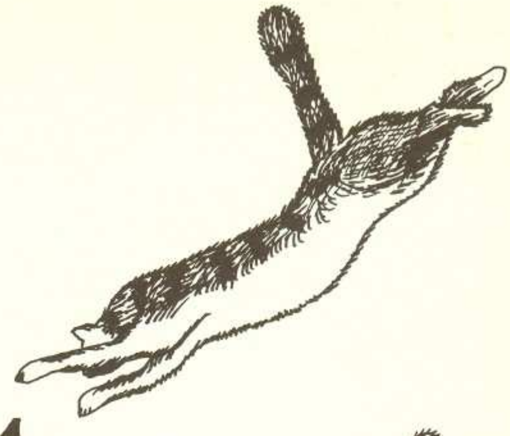
W każdym z rozpatrywanych trójkątów T oznaczmy przez $\varphi(T)$ kąt przy wierzchołku stanowiącym punkt styczności ściany z kulą. Oczywiście $\sum\varphi(T_c) = 2\pi n_c$, $\sum\varphi(T_z) = 2\pi n_z$, gdzie n_c i n_z oznaczają odpowiednio liczbę ścian czerwonych i zielonych, a sumowanie rozciągnięte jest na wszystkie trójkąty czerwone i zielone. Z uwagi na przystawanie parami trójkątów T_c i T_z te dwie sumy są równe, a więc $n_c = n_z$.

21. Przejście do granicy przy podstawieniu (3) jest niedopuszczalne: w definicji pochodnej $f'(x)$ jako granicy ilorazu różnicowego liczba x jest wielkością stałą.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

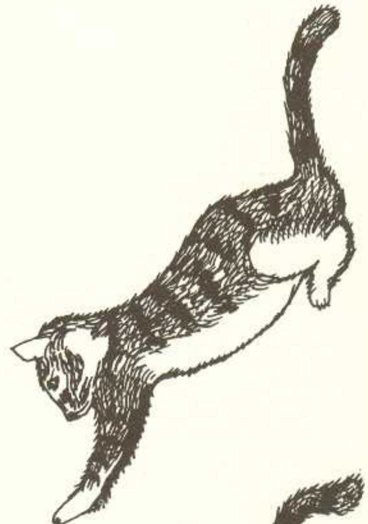


1.



4.

2.



5.

3.

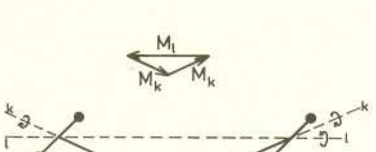
6.

Rozwiązanie zadania F 118

Na podstawie wielu fotografii spadającego kota stwierdzono, że najczęściej zaraz po puszczeniu do góry łapami kot wygina grzbiet. Przednia i tylna część kota zaczynają się następnie obracać w tym samym kierunku, każda wokół własnej osi. Moment pędu związany z tym obrotem kompensowany jest przez obrót całego kota w kierunku przeciwnym. Wygięcie kota powoduje, że prędkość kątowa pierwszego obrotu jest większa niż drugiego, dzięki czemu kot może spaść na cztery łapy.

Aby ocenić ten efekt liczbowo, rozważmy cztery jednakowe masy połączone nieważkimi prętami jak na rysunku. W punkcie X pręty połączone są przegubem. Moment bezwładności I dwóch mas względem osi k jest dwukrotnie mniejszy niż moment bezwładności względem osi l przechodzącej przez środek masy, a momenty pędu są odpowiednio równe

$$M_k = \omega I \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad M_l = 2I\Omega,$$



gdzie ω, Ω są prędkościami obrotu względem k i l. Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że $\Omega = \omega \sin\frac{\alpha}{2}$.

Dla $\alpha = \frac{\pi}{3}$ obrót wokół osi k jest dwukrotnie szybszy niż względem l. Ruch taki, zwany ,,kocim obrotem" jest też czasami stosowany podczas skoków do wody.