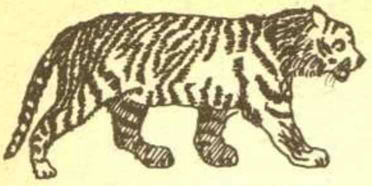
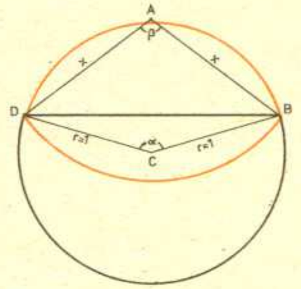


tygrys – panthera tigris.

Atraktor i koza

W artykule pt. „Cyrklem, linijką czy minikalkulatorem" w *Delcie* 11/1981 Jerzy Bednarczuk zastanawia się nad starym zagadnieniem: czy „lepsza" jest geometria aksjomatyczno-intuicyjna, jakiej szczątków naucza się w szkołach, czy analityczna — a więc rachunkowa. Konkluzja autora jest jasna: czasem pierwsza, a czasem druga, przykłady zadań rozwiązalnych łatwo jedną a trudno drugą metodą można mnożyć.

Mało jest efektownych zastosowań minikalkulatora w geometrii. Interesujący przykład takiego zastosowania daje stare zadanie o kozie. U brzegu kolistego pastwiska przywiązana jest na długim sznurku koza. Jaka powinna być długość sznurka, aby w zasięgu kozy była dokładnie połowa pastwiska?



Rys. 1

Odcinka o szukanej długości sznurka nie da się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. Długość ta nie wyraża się też prosto przez funkcje elementarne. Do rozwiązania przyda się kalkulator. A oto, jak.

Przyjmijmy, że pastwisko jest kołem o promieniu 1 i środku w punkcie C, a palik, do którego uwiązana jest koza, jest wbity w A (rys. 1). Wówczas

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{x}{2} = \sin\frac{\alpha}{4},$$

a stąd przez proste przekształcenia trygonometryczne dostajemy

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Dalej obliczamy (por. rys. 2), że pole „górnego" odcinka kołowego o podstawie BD z rys. 1 wynosi

$$S_1 = \frac{1}{2}(\alpha-\sin\alpha) = 2\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

i podobnie pole „dolnego" odcinka kołowego o tej samej podstawie BD wynosi

$$S_2 = \frac{x^2}{2}(\beta-\sin\beta) = x^2\arccos\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Sumą tych pól ma być pole połowy pastwiska, czyli $\frac{\pi}{2}$ i po krótkich rachunkach mamy

$$\arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{2}\arccos\frac{x}{2},$$

skąd dopisując „sin" po obu stronach

$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{2}\arccos\frac{x}{2}\right).$$

Pisząc prawą stronę tej równości jako $f(x)$ mamy następujące równanie długości koziego postronka

$$x = f(x).$$

Rys. 2. Pole wycinka kołowego o rozwartości α jest równe $\frac{\alpha r^2}{2}$ (kąt α w radianach), a pole widocznego na rysunku trójkąta wynosi $(r^2\sin\alpha)/2$. A więc pole zakreskowanego odcinka kołowego $S = r^2(\alpha-\sin\alpha)/2$.

Rozwiązanie zadania z artykułu o paraboli
Spodki P_1, P_2, P_3 wysokości poprowadzonych z wierzchołka P w tych trójkątach są współliniowe (**Wniosek 3**). Punkty A_1, B_1, C_1 są obrazami tych spodków przy złożeniu obrotu wokół punktu P o kąt $\sphericalangle P_1PA_1$ z jednokładnością o środku P i skali $\alpha = \frac{A_1P}{P_1P}$.

Niech x_1 będzie równe np. 1, a $x_{n+1} = f(x_n)$. Przechodząc do granicy po obu stronach tej ostatniej równości i oznaczając $g = \lim x_n$ mamy $g = f(g)$, tzn. g jest szukaną długością sznurka.

Bierzemy kalkulator, najlepiej programowany i obliczamy: $x_2 = f(x_1) = 1{,}28048\ldots$, $x_3 = f(x_2) = 1{,}06079\ldots$, $x_4 = f(x_3) = 1{,}23538\ldots, \ldots, x_{10} = 1{,}17865\ldots$ Ciąg jest zbieżny bardzo powoli, x_{25} wynosi $1{,}15803\ldots$, $x_{50} = 1{,}15873$, około siedemdziesiątego piątego ustala się jednak ósma cyfra znacząca i wartość graniczna wynosi z tą dokładnością

$$g = 1{,}1587285\ldots$$

Można powiedzieć, że g jest punktem stałym przyciągającym dla przekształcenia f (patrz artykuł Pawła Góry).

Przymknęliśmy tu oko na zagadnienie zbieżności ciągu x_n (dlaczego jest zbieżny?), zadowalając się fizycznym uzasadnieniem: przecież istnieje taki sznurek, że jak do niego uwiązać kozę, to zeżre połowę trawy z pastwiska.

Irena KOZŁOWSKA

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 301. Drogi w krainie Id łączą ze sobą i z zamkiem króla 60 zamków rycerskich, przy czym z każdego zamku wychodzą 3 drogi. Król wybrał się w podróż po swym królestwie spędzając w każdym napotkanym zamku noc i opuszczając zamek co drugi dzień drogą wiodącą w prawo, a co drugi dzień — drogą w lewo od drogi, którą przybył. Czy wróci do swego zamku przed upływem roku?
Rozwiązanie na str. 11

M 302. Wykazać, że jeżeli $\frac{1}{k} < a < \frac{1}{k-1}$, to do pokrycia koła o średnicy 1 potrzeba i wystarcza k prostokątów $a \times 1$.
Rozwiązanie na str. 7

M 303. Znaleźć takie uporządkowanie $(a_0', \ldots, a_n')$ ciągu liczb rzeczywistych $a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, aby suma

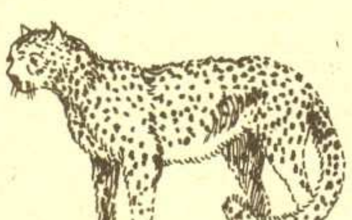
$$S = (a_0'-a_1')^2+(a_1'-a_2')^2+\ldots+(a_{n-1}'-a_n')^2+(a_n'-a_0')^2$$

była najmniejsza.
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 117. Domowe młynki do kawy napędzane są silnikami elektrycznymi. Jak rozstrzygnąć eksperymentalnie, w którą stronę obraca się wirnik, jeżeli nie możemy obserwować go bezpośrednio?
Rozwiązanie na str. 5

F 118. Dlaczego kot nawet spadając grzbietem do dołu (z zerowym całkowitym momentem pędu) zawsze obraca się i spada na cztery łapy? Jak pogodzić to z zasadą zachowania momentu pędu?
Rozwiązanie na str. 17


gepard - acinonyx.