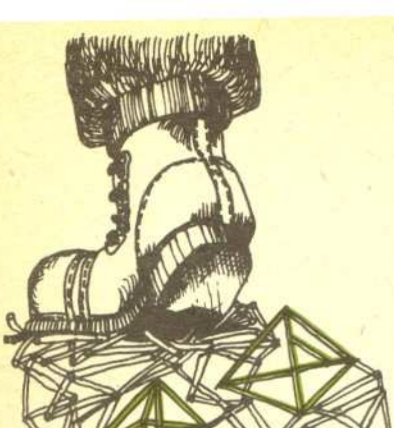

Twierdzenie o dyktatorze

Nietrudno stworzyć teoretyczny model wyborów np. prezydenckich, w których zwycięża kandydat uzyskujący mniej głosów — często dzieje się tak i naprawdę przy wyborach pośrednich. Do różnych paradoksów może też dojść, gdy liczba możliwości do wyboru przekracza 2 (jeden z nich widzimy w artykule B. Kopocińskiego w tym numerze *Delty*). W 1950 r. Kenneth Arrow (Nagroda Nobla w dziedzinie ekonomii, 1972) odkrył głębokie i zadziwiające prawo: gdy $n \geqslant 2$ osób wybiera spośród $m \geqslant 3$ możliwości, to pewne naturalne i rozsądnie wyglądające reguły tego wyboru mogą być spełnione tylko w warunkach dyktatury.

Będziemy to ilustrować na prostym przykładzie $n = 2$, $m = 3$. Dwie osoby: I i II rozpatrują trzy możliwości A, B, C. Każda osoba ustala swoją listę preferencji, np. I uważa, że A < C < B (A jest gorsze niż C, C jest gorsze niż B), zaś dla II jest B < A < C. Ze wszystkich indywidualnych list preferencji (u nas: dwu) ma powstać ostateczna kolejność projektów (kandydatów, drużyn piłkarskich itd.) A, B, C. Procedurę ustalania tej ostatecznej listy oznaczmy przez Φ i nazwijmy procedurą kompromisu lub krótko kompromisem. W naszym przykładzie ($n = 2$, $m = 3$) możliwych układów list indywidualnych jest $(3!)^2$, ogólny wzór $((m!)^n)$ jest zrozumiały. Oznaczmy przez P ten $(m!)^n$-elementowy zbiór wszystkich zestawów list. Kompromis Φ przyporządkowuje każdemu elementowi p zbioru P pewną kolejność możliwości A, B, C, ...

Najprostszym przykładem Φ jest dyktatura: Φ (zespół list) = lista sporządzona przez I. Zrozumiałe jest, że procedura ,,kompromisu'' nie może być dowolną funkcją i że następujące dwa warunki na Φ są najzupełniej rozsądne:

1) jednomyślność: jeżeli wszystkie osoby uznają A < B, to na liście kompromisowej będzie również A < B;

2) niezależność: jeśli dla dwóch zestawów list preferencji $p_1 \in P$ i $p_2 \in P$ zbiór osób uznających A < B jest w obu przypadkach ten sam, to porządek A i B na kompromisowej liście $\Phi(p_1)$ jest taki sam, jak na $\Phi(p_2)$.

W naszym dwuelementowym przykładzie: kompromis każdych list, w których I stawia B < A, a II stawia A < B, musi ustawiać A i B w jednakowym porządku. Jeżeli tym porządkiem jest B < A, to powiemy, że I dyktuje II w sprawie (A, B).

Podstawowy *lemat o wymianie* głosi, że jeżeli I dyktuje w sprawie (A, B), to również dyktuje w (A, C) i (B, C), a więc dyktuje w każdej sprawie, tj. jest dyktatorem. Ale (gdy $n = 2$, dwie osoby) jedna z osób na pewno dyktuje np. w (A, B); dyktuje zatem w ogóle! W małżeństwie jedna ze stron jest dyktatorem, chyba, że nie przestrzegają reguł 1) i 2).

Gdy $n > 2$, twierdzenie o istnieniu dyktatora jest pewnym twierdzeniem algebry. Oznaczmy przez $\mathscr{D}$ zbiór wszystkich ,,grup dyktujących'', tzn. $D \in \mathscr{D}$, gdy funkcja ,,kompromisu'' Φ jest wyznaczona przez swoje wartości dla list ułożonych przez członków grupy D. Jest dość oczywiste, że

a) wszystkie osoby tworzą ,,grupę dyktującą'',

b) $$D_1, D_2 \in \mathscr{D} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathscr{D},$$

c) $$E \supset D, D \in \mathscr{D} \Rightarrow E \in \mathscr{D},$$

tj. $\mathscr{D}$ jest filtrem w rodzinie podzbiorów zbioru wszystkich ,,decydentów''. Główny wynik Kennetha Arrowa można sformułować tak: przy założeniach 1) i 2) ten filtr jest ultrafiltrem a odpowiednie twierdzenie algebraiczne mówi, że istnieje wtedy jednoosobowa ,,grupa dyktująca'', czyli dyktator.

Zwolennicy pluralizmu zadowolić się mogą rezultatem (B. Peleg, 1978) podającym inne, również naturalne i rozsądne warunki na funkcję Φ, które już dopuszczają istnienie niedyktatorskich ,,kompromisów''. Szczegóły znaleźć można w pracy tegoż autora w czasopiśmie *Econometrica*, 46, str. 153—161, 1978 r.

(opr. red. na podstawie *Mathematics Calendar* 1981)

Rozwiązanie zadania M 298. Niech $p < 15$ będzie liczbą pierwszą. Gdyby $a_1 = p$, to $a_{p+1} = a_1 + pr = p(r+1)$ byłoby złożone wbrew założeniu. Oznaczmy teraz przez r_k resztę z dzielenia $k \cdot r$ przez p. Jeżeli $p \nmid r$, to $r_1, \ldots, r_{p-1}$ wyczerpują wszystkie liczby $1, 2, \ldots, p-1$ i wobec tego znajdzie się takie k, że $r_k = p - s$, gdzie s jest resztą z dzielenia a_1 przez p.
Ale wtedy $p | a_{k+1} = a_1 + k \cdot r$ wbrew założeniu i wobec tego p musi dzielić r.
Wynika stąd, że $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 | r$, więc $a_{15} > 14r > 400000$.