Paradoks trzech zmiennych losowych

Prof. dr Bolesław ***KOPOCIŃSKI***

Mówimy, że gracz B bije gracza A, jeżeli częściej z nim wygrywa niż przegrywa. Wśród graczy, np. szachistów znane jest następujące zjawisko: gracz B bije gracza A, gracz C bije gracza B i gracz A bije gracza C.

Zjawisko to można sformalizować następująco: forma każdego gracza jest zmienną losową, a wygrywa gracz, który w danej próbie ma wyższą formę. Oznaczmy przez X, Y, Z odpowiednio formy graczy A, B, C. Z opisu zjawiska wynika, że może być $P(Y > X) > 1/2$, $P(Z > Y) > 1/2$, $P(X > Z) > 1/2$.

Rozgrywki szachowe mają na celu liniowe uporządkowanie graczy. Ich formy, a więc odpowiednie zmienne losowe możemy uporządkować mówiąc, że zmienna losowa Y „jest większa" od zmiennej losowej X, jeżeli $P(Y > X) > 1/2$. Niestety okazuje się, że ta relacja nie jest przechodnia. Fakt ten nosi nazwę paradoksu trzech zmiennych losowych Steinhausa i Trybuły (zob. S. Trybuła, On the Paradox of Three Random Variables, *Zastosowania Matematyki*, V (1961), str. 321—332).

Istnienie paradoksu wyjaśnia następujący przykład. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartość 1 albo 4 z rozkładem prawdopodobieństwa $P(X = 1) = p$, $P(X = 4) = 1-p$, niech zmienna losowa Y przyjmuje wartość 2 czyli $P(Y = 2) = 1$, zaś zmienna losowa Z — wartość 0 albo 3 z rozkładem prawdopodobieństwa $P(Z = 0) = 1-p$, $P(Z = 3) = p$. Przy założeniu, że zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, $0 < p < 1$, obliczamy

$$P(Y > X) = P(Y = 2, X = 1) = P(Y = 2)P(X = 1) = p,$$

$$P(Z > Y) = P(Z = 3, Y = 2) = P(Z = 3)P(Y = 2) = p,$$

$$\begin{aligned} P(X > Z) &= P(X = 1, Z = 0)+P(X = 4, Z = 0)+P(X = 4, Z = 3) = \\ &= P(X = 1)P(Z = 0)+P(X = 4)P(Z = 0)+P(X = 4)P(Z = 3) = 1-p^2. \end{aligned}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 0{,}618\ldots$, to po prawej stronie mamy zawsze tę samą wartość $0{,}618\ldots$, a więc mamy paradoks.

Traktując zadanie bardziej ogólnie możemy zapytać, dla jakich trójek liczb rzeczywistych a, b, c istnieją takie niezależne zmienne losowe X, Y, Z, że $P(Y > X) = a$, $P(Z > Y) = b$, $P(X > Z) = c$. Odpowiedź jest następująca: Oznaczmy

$$\alpha(a, b) = \begin{cases} \max\left(1-ab, \dfrac{1-a}{b}, \dfrac{1-b}{a}\right) & \text{gdy } a+b > 1, \\ 1 & \text{gdy } a+b \leqslant 1, \end{cases}$$

przy czym $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$. Trójka X, Y, Z niezależnych zmiennych losowych spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1-\alpha(1-a, 1-b) \leqslant c \leqslant \alpha(a, b).$$

W szczególności, jeżeli $a = b = c$, to

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant c \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ldots$$

Fakt ten wzmacnia poprzednio rozważany przykład. Okazuje się bowiem, że dopuszczając zmienne losowe o dowolnym zbiorze wartości nie można paradoksu uczynić bardziej wyrazistym.

Założenie niezależności formy poszczególnych szachistów we wzajemnych próbach jest pewną idealizacją rzeczywistości, możliwą do przyjęcia. Istnieją jednak sytuacje, w których niezależności nie ma i wówczas paradoksalność sytuacji może być wyraźniejsza. Przypuśćmy, że zebranie ma podjąć pewną uchwałę wybierając spośród trzech jej projektów A, B, C, biorąc pod rozwagę pary projektów i wybierając większością głosów „lepszy" z każdej pary. Każdy projekt ma pewną wartość preferencyjną określoną na zbiorze zebranych. Oznaczmy przez A < B to, że wyborca przedkłada projekt B nad A. Przy trzech projektach możliwy jest podział zgromadzenia na sześć frakcji; przypuśćmy, że ujawnią się jedynie trzy frakcje

1/3 zgromadzenia uznaje A < B < C,
1/3 zgromadzenia uznaje B < C < A,
1/3 zgromadzenia uznaje C < A < B.

Nietrudno spostrzec, że zebrani większością 2/3 głosów wybiorą projekt B spośród A, B, projekt C spośród B, C i projekt A spośród C, A.

Rozwiązanie zadania M 299. Jeżeli ABC jest szukanym trójkątem, to obracając B wokół A o kąt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_0A_0C_0$ do położenia B' zauważymy, że C jest obrazem B' przy jednokładności o środku A i stosunku

$$\frac{AC}{AB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{A_0C_0}{A_0B_0}.$$

Wynika stąd, że C jest punktem wspólnym prostej q i prostej p' powstałej z p przez wykonanie opisanego wyżej obrotu i jednokładności. Znalezienie B nie przedstawia już trudności. Widać ponadto, że jeżeli kąty między p i q są różne od $\sphericalangle B_0A_0C_0$, to zadanie ma dwa rozwiązania odpowiadające dwu różnym kierunkom obrotu B, w przeciwnym razie może istnieć 0, 1 lub nieskończenie wiele rozwiązań.