Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

$\sqrt[\otimes]{\int\!\!\!\!\sum\!\!\!!} = 44$

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 2/1982

16. Gdyby ciąg $\{x_n\}$ był ściśle rosnący, mielibyśmy $x_n \geqslant n-1$ dla każdego n. Weźmy $n = 2^k$, gdzie $k \geqslant \max(5, x_2)$. Otrzymujemy sprzeczność, bo wówczas $2^k - 1 \leqslant x_{2^k} = kx_2 \leqslant k^2 < 2^k - 1$.

17. Udowodnimy twierdzenie dla dowolnego ograniczonego obszaru wypukłego W, niekoniecznie wielokąta. (Jest ono prawdziwe i bez założenia wypukłości, dla każdego obszaru ograniczonego krzywą zamkniętą, ale dowód jest znacznie trudniejszy).
Dla dowolnej prostej l przecinającej obszar W zbudujmy kwadrat, którego przekątną jest odcinek $l \cap W$, i weźmy pod uwagę jego dwa wierzchołki P, Q nie leżące na l. Będziemy mówili, że prosta l jest: typu (1), gdy punkty P i Q leżą wewnątrz W; typu (2), gdy P i Q leżą na zewnątrz W; typu (3), gdy P i Q leżą na brzegu W. Korzystając z wypukłości W można niezbyt trudno wykazać (pominiemy tę część dowodu), że każdą prostą nie należącą do żadnego z tych trzech typów można przez przesunięcie równoległe sprowadzić do jednego z tych typów oraz że przesunięcie równoległe nie może zmienić typu prostej. Widać, że typy (1) i (2) są stabilne, tj. mała zmiana kierunku prostej typu (1) [lub (2)] nie zmienia jej typu. Natomiast zmiana kierunku na prostopadły przeprowadzi prostą typu (1) na prostą typu (2) i odwrotnie.
Dowód twierdzenia sprowadza się do pokazania, że istnieje co najmniej jedna prosta typu (3). Załóżmy, że tak nie jest, tzn. że każda prosta jest z dokładnością do przesunięcia typu (1) lub (2). Ustalmy pewien kierunek ze zwrotem jako zerowy i przyporządkujmy każdej wartości kąta $\alpha \in \langle 0, \pi)$ liczbę $f(\alpha)$ równą 1 lub 2 w zależności od tego, czy proste nachylone do kierunku zerowego pod kątem α należą do typu (1) czy (2). Z uwagi na stabilność tych typów funkcja f jest ciągła, a zatem stała. Sprzeczność, bo $f(0) \neq f(\pi/2)$.

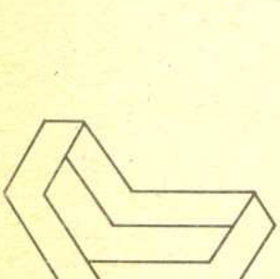
18. Wśród rozpatrywanych $\binom{8}{3} = 56$ trójkątów jest 8 trójkątów o bokach $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, 24 trójkąty o bokach $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ i 24 trójkąty o bokach $(1, 1, \sqrt{2})$. Ich pola równe są odpowiednio $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{2}/2$, $1/2$. Zatem wartość oczekiwana badanej zmiennej losowej (pola trójkąta) wynosi

$$E = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{56} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{24}{56} + \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{56} = \frac{1}{14}(\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 3) = 0{,}641\ldots$$

Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Nasz kolega PROOF, dostarczający zwykle materiału do tego kącika umie chwilowo rozwiązać wszystkie znane mu zadania ze szkolnej geometrii elementarnej. Wobec tego zadanie, którego nie umiemy rozwiązać nie tylko my, ale i czytelnicy *Journal of Recreational Mathematics*.

Łatwo złożyć wielokąt (np. kwadrat) z czterech mniejszych kwadratów. Przeciwległe płytki stykają się narożnikami. Nie można oczywiście ułożyć ich tak, by każdy z każdym graniczył wzdłuż jakiejś linii. Na użytek zadania wymyślmy następujące określenie: Czworoblokiem nazywamy figurę podzieloną na cztery przystające wielokąty w ten sposób, że część wspólna każdych dwóch zawiera odcinek.



Jeden z takich czworobloków widzimy na rysunku. Jak widać, nie jest on wypukły. Czy są i wypukłe czworobloki? Tego właśnie nie wiemy.

(wg *Journal of Recreational Mathematics*, 11 (4), 1979)