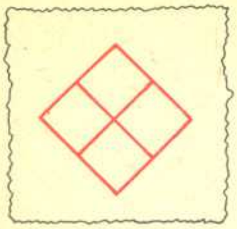
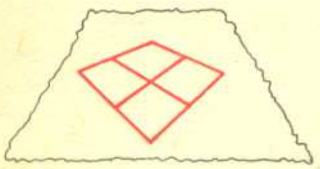
Raz jeszcze o geometrii rzutowej

Dr Marek KORDOS



Jeśli do każdej prostej na płaszczyźnie euklidesowej dołączymy nowy punkt — jej kierunek i umówimy się, że wszystkie nowe punkty tworzą nową prostą, to tak wzbogacona płaszczyzna będzie płaszczyzną rzutową. Pisaliśmy już o tym kilkakrotnie.

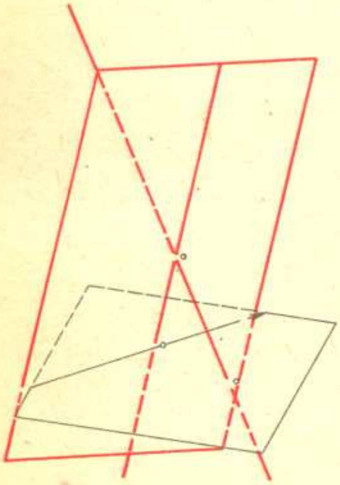
KTO JĄ ZROBIŁ I PO CO



Geometrię rzutową „wymyślili" siedemnastowieczni geometrzy. Patrząc mianowicie na tryumfującą wówczas w malarstwie perspektywę zbieżną, gdzie proste równoległe zbiegały się na horyzoncie pomyśleli: w tym szaleństwie jest metoda! (też cytat z XVII wieku). Bo przecież każdy przyzna, że perspektywa zbieżna (= fotograficzna) doskonale przedstawia rzeczywistość. Stąd nieuniknione pytanie: jakie są jej geometryczne reguły. Z drugiej strony zauważyli, że znajomość tych reguł pozwoli ułatwić rozwiązywanie „zwyczajnych" zadań geometrycznych. Wystarczy bowiem na rysunek z danymi zadania spojrzeć perspektywicznie w odpowiedni sposób i już nie będzie na nim żadnych prostych równoległych. Rzecz jednak w tym, czy rezygnacja z pojęcia przystawania (ono się psuje w perspektywie — prawda?) będzie mniejszą stratą, niż zysk z możliwości używania punktów przecięcia dowolnych prostych. Okazało się, że w każdym razie warto używać i tej metody.

JAK TO OBEJRZEĆ

Płaszczyzna rzutowa w momencie swego powstania była obiektem bardzo dziwnym. Były na niej zwykłe proste, ale była też i „niezwykła", były zwykłe punkty, ale też i „niezwykłe". Jednak wszelkie próby znalezienia jakiejś własności „niezwykłych" punktów czy prostej, wyróżniającej je od zwykłych nie udawały się. Wyciągnięto stąd słuszny (jak się potem okazało) wniosek, że nasz ogląd płaszczyzny rzutowej, jako wzbogaconej euklidesowej, jest tendencyjny. Jak zatem spojrzeć na nią obiektywnie?



Opisana niżej metoda jest szczególnym przypadkiem zastosowania ogólnego pojęcia *izomorfizmu*, wynalezionego pod koniec XIX w. „Izomorficzny" — znaczy „tak samo zbudowany". Jeśli więc mamy obiekty izomorficzne, to mają one te same własności i możemy oglądać ten z nich, który nam „bardziej pasuje". Tu do *standardowej* płaszczyzny rzutowej (opisanej wyżej) dołączymy kilka izomorficznych. W ten sposób oglądając to ten, to ów, być może dostatecznie wszechstronnie potrafimy ją obejrzeć.

JEDNORODNOŚĆ

Środkową płaszczyzną rzutową nazwiemy następujący obiekt: nad standardową płaszczyzną rzutową obieramy punkt, dalej zwany środkiem. Każdemu punktowi standardowej płaszczyzny rzutowej przyporządkowujemy prostą łączącą go ze środkiem. To przekształcenie daje nam właśnie środkową płaszczyznę rzutową. Jej „punkty" to proste przechodzące przez środek. A jej „proste" — (oczywiście!) to płaszczyzny przechodzące przez środek. Łatwo zauważyć, że „niezwykłym" punktom płaszczyzny standardowej odpowiadają proste równoległe do jej euklidesowej części, a „niezwykłej" prostej — równoległa płaszczyzna. Leżeniu punktu na prostej w modelu standardowym odpowiada w modelu środkowym leżenie prostych na płaszczyznach. Zauważmy jednak, że model środkowy jest całkowicie *jednorodny*: wszystkie jego „punkty" i wszystkie jego „proste" nie różnią się wzajemnie.

DUALNOŚĆ

Metoda okazała się dobra — stosujmy ją dalej. Obierzmy mianowicie przestrzenny układ współrzędnych tak, aby środek naszego środkowego modelu był początkiem układu, a więc miał współrzędne (0,0,0). Wówczas każdej prostej przechodzącej przez środek odpowiadać będzie trójka liczb (a, b, c) taka, że dowolny punkt tej prostej będzie postaci $(a\cdot t, b\cdot t, c\cdot t)$ — prawda? Tyle, że jednej prostej odpowiadać będzie wiele trójek, dokładniej — każda trójka proporcjonalna do (a, b, c) z wyjątkiem trójki $(0, 0, 0)$ — ich zbiór oznaczmy $[a, b, c]$. Tak więc każdemu „punktowi" modelu środkowego odpowiada pewien zbiór $[a, b, c]$.

Zabierzmy się do płaszczyzn przechodzących przez środek. Każda z nich jest postaci

$$px+qy+rz = 0,$$

a więc i jej odpowiada jednoznacznie pewien zbiór $[p, q, r]$ trójek. A więc każdej „prostej" modelu środkowego też odpowiada pewien zbiór $[p, q, r]$.

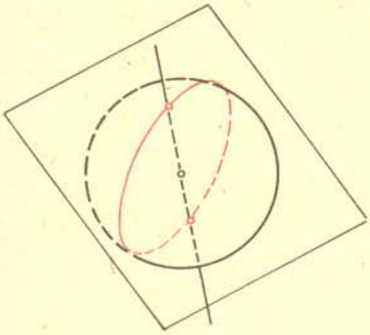
Powstaje nam więc model zwany *analitycznym*, w którym punkty są nierozróżnialne od prostych. Ciekawe! Tym ciekawsze, że prosta leży na płaszczyźnie, gdy jej wektor kierunkowy (a więc (a, b, c)) jest prostopadły do wektora prostopadłego do płaszczyzny (a więc (p, q, r)), czyli

$$ap+bq+cr = 0. \tag{x}$$

Rozwiązanie zadania **M 296.** Zapiszmy równanie „dokładne" w formie $y^2+py+Q = 0$. Odejmując je od danego, mamy $(x^2-y^2)+p(x-y)+q-Q = 0$, czyli $(x-y)(x+y+p) = Q-q$. Oznaczając przez y_1 pierwiastek dokładny bliższy x_1, a przez x_2 drugi pierwiastek przybliżony mamy $|x_1-y_1| = |Q-q|/|x_1+y_1+p| = |Q-q|/|x_1+y_1-(x_1+x_2)| = |Q-q|/|y_1-x_2|$. Ale $|y_1-x_2| \approx \sqrt{\Delta} > 10$ i wobec tego $|x_1-y_1| < 0{,}0001$.

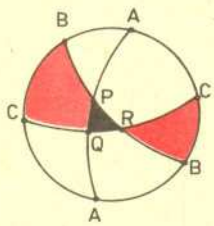
Zatem i warunek na leżenie ,,punktu'' na ,,prostej'' w modelu środkowym tak samo się prezentuje ze strony ,,punktów'', jak i ,,prostych''.
Chwila namysłu i morał: Na płaszczyźnie rzutowej własności punktów i prostych niczym się nie różnią. Albo mocniej: Jeśli w twierdzeniu geometrii rzutowej zamienimy miejscami nazwy punktów i nazwy prostych, to otrzymamy znów (często inne) twierdzenie geometrii rzutowej. Ta własność nazywa się *dualnością*. Zatem, przez odpowiedni izomorfizm wykazaliśmy dualność.

DWA ZADANIA DLA CZYTELNIKA

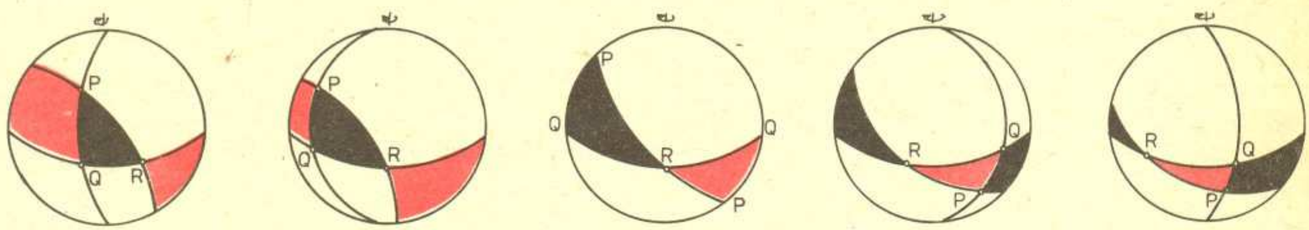


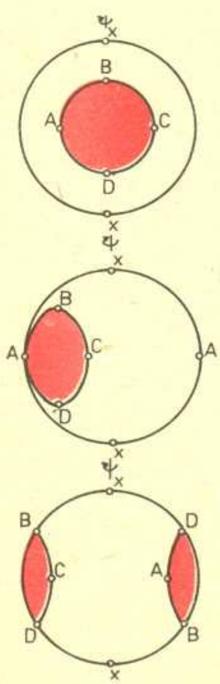
Pierwsze to w gruncie rzeczy formalność — po prostu nie sprawdziliśmy jeszcze, że wzór (x) opisujący leżenie ,,punktu'' na ,,prostej'' nie zależy od tego, którą konkretnie z trójek liczb odpowiadających ,,punktowi'' i którą spośród trójek liczb odpowiadających ,,prostej'' wybraliśmy. Ale nie zależy — Czytelniku, sprawdź!
I drugie zadanie: można ze standardowej płaszczyzny rzutowej przejść bezpośrednio do opisanego wyżej modelu analitycznego. Czytelniku, zrób to! (Ewentualną pomoc można znaleźć w ,,Delcie'' 12/1980).

JEDNOSTRONNOŚĆ

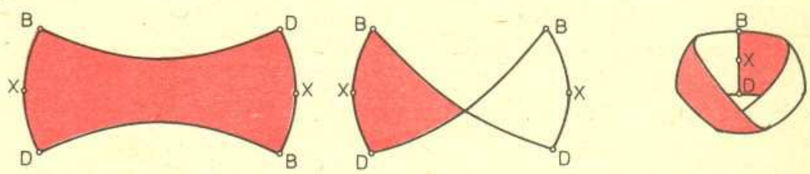


Od modelu środkowego przejdziemy teraz do modelu *na sferze*. Mianowicie zobaczmy, co się stanie, jeśli ,,punkty'' — tj. proste przechodzące przez środek i ,,proste'' — tj. płaszczyzny przechodzące przez środek przetniemy ze sferą o środku... no, gdzieżby — oczywiście w środku. Nowymi ,,punktami'' będą teraz pary antypodów, a nowymi ,,prostymi'' — okręgi wielkie sfery. Model ten ma wielką zaletę — użyty do jego budowy surowiec (czyli sferę) można traktować tak jakby był to obiekt materialny. Można np. oglądać tylko tę stronę sfery, którą widać. I przy założeniu, że widzimy połowę sfery, będziemy mieli o modelu pełną informację. Istotnie — na półsferze jest reprezentowana każda para antypodów i to przeważnie przez jeden punkt. Oba antypody widać tylko na brzegu.
Taki sposób oglądania modelu na sferze ma wielką zaletę. Można obracać sferę, a zmieniający się na niej obraz będzie po prostu odpowiadał oglądaniu figury z różnych stron. Przecież, gdy jeden z antypodów będzie ginął nam z oczu z drugiej strony pojawi się jego *alter ego* — w naszym modelu ten sam punkt. Seria rysunków wskazuje np., że figura czarna i czerwona w istocie





wyglądają tak samo. Można te rysunki sprawdzić rysując kredą na globusie. A teraz właśnie o *jednostronności*. Narysujmy na sferze kółko. No i obracajmy. Po chwili stwierdzamy, że płaszczyzna rzutowa to suma kółka i wstęgi Möbiusa. Rzeczywiście — sklejenie obu *B*, obu *D* i obu *X* to wstęga Möbiusa. A że wstęga Möbiusa ma jedną tylko stronę, więc jedną stronę ma i cała płaszczyzna rzutowa.



ZNÓW ZADANIA

A raczej propozycje wykonania samodzielnych obserwacji:
1. Trzy proste dzielą płaszczyznę rzutową na cztery tak samo wyglądające figury.
2. Jedna prosta w ogóle nie dzieli płaszczyzny rzutowej.
3. Parabola, hiperbola i elipsa wyglądają na płaszczyźnie rzutowej tak samo.

MORAŁ

z tego taki: ci, co wymyślili geometrię rzutową, sami nie wiedzieli, jaka to zdumiewająca dyscyplina. A dziś, gdy już wiele o niej wiemy, właściwie zapomnieliśmy o jej ,,plastycznym'' pochodzeniu. I uprawiamy ją jako suwerenną dyscyplinę wiedzy. W gruncie rzeczy tą drogą powstały wszystkie gałęzie nauki.
A zatem do roboty. Weźmy się za jakiś konkretny obiekt, skrupulatnie obejrzyjmy go ze wszystkich stron, przyjrzyjmy się obiektom izomorficznym i... nowa gałąź wiedzy gotowa.