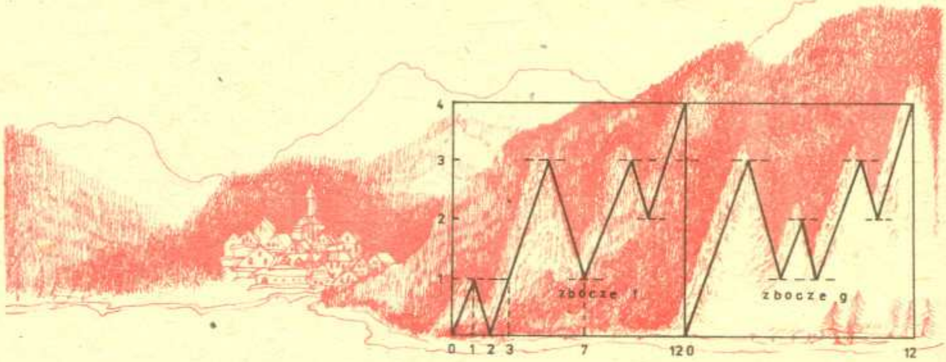
Dwaj taternicy...

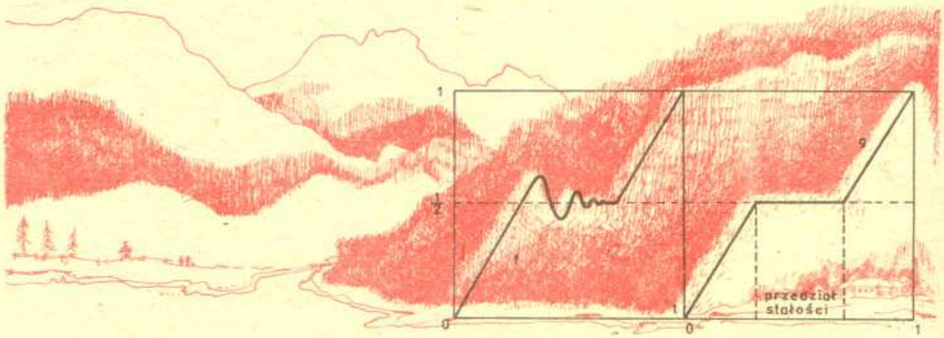
Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

Dwaj taternicy, wychodząc z miejsc leżących na tym samym poziomie wchodzą na szczyt, jeden po zboczu o profilu $y = f(x)$, a drugi po zboczu o profilu $y = g(x)$, gdzie f i g są funkcjami ciągłymi o wartościach w odcinku [0, 1]; zmienna x też przebiega odcinek [0, 1], załóżmy, że $f(0) = g(0) = 0$ (poziom wyjściowy) i $f(1) = g(1) = 1$ (szczyt).



Rys. 1. Funkcje f i g są tu bardzo proste: określa je pięć wartości $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ na zbiorze $\{0, 1, \ldots, 12\}$, poza tym są liniowe.

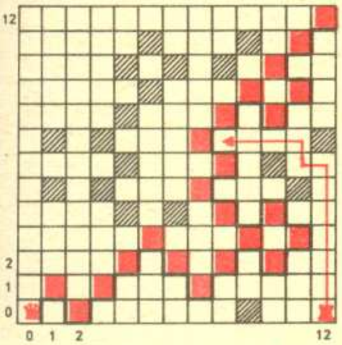
Czy mogą tak ułożyć marszruty, aby w każdej chwili być na tym samym ze sobą poziomie? Bardziej matematycznie: czy istnieją funkcje ciągłe $x = a(t)$ i $y = b(t)$ takie, że $f(a(t)) = g(b(t))$ dla każdego t z odcinka $0 \leqslant t \leqslant 1$ i takie, że $a(0) = b(0) = 0$ i $a(1) = b(1) = 1$?
Tak mniej więcej zaczęli swoją pracę Sikorski i Zarankiewicz (*Fundamenta Mathematicae* 41 (1954), str. 339—344); byli inni autorzy, którzy również postawili sobie ten problem: T. Homma (*Kodai Mathematical Seminar Reports* 1 (1952), 13—16) i J. V. Whittaker (*A Mountain-climbing Problem, Canadian Journal of Mathematics* 18 (1966), str. 873—882); nie wykluczone, że byli jeszcze inni, bo interesujące zadania bywają stawiane i rozwiązywane wielokrotnie i niezależnie. Jeśli na żadnym ze zboczy nie ma przedziałów stałości, to marszruty spełniające warunki zadania istnieją. Zastrzeżenie co do przedziałów stałości jest istotne, na co wskazują funkcje przedstawione na rysunku 2.



Rys. 2. Funkcja g ma przedział stałości na wysokości 1/2, a funkcja f ma nieskończenie wiele oscylacji wokół tego poziomu. Taternik idący po drobnych wzniesieniach i zagłębieniach zbocza f zmusiłby taternika idącego po zboczu g do chodzenia tam i z powrotem, nieskończenie wiele razy po przedziale stałości funkcji g.

Jeżeli założyć, że funkcje f i g mają jedynie skończenie wiele oscylacji, np. że są kawałkami liniowe, to można dopuścić istnienie przedziałów stałości; rozwiązania a i b można znaleźć wtedy również w postaci funkcji kawałkami liniowych. Ten przypadek, jak zobaczymy, nie jest wcale banalny, a okazuje się wystarczający dla zastosowań, o których także będzie mowa. Funkcje f i g są wyznaczone teraz przez podanie wartości na pewnym zbiorze skończonym — zbiorze punktów zmiany wzoru liniowego określającego funkcje (p. podpis pod rys. 1). Stąd, zadanie można w tym przypadku sprowadzić do kombinatoryki, tj. do zadania o zbiorach skończonych. Brzmi ono jak następuje. Dane są dwa odcinki zbioru liczb naturalnych, $B = \{0, 1, \ldots, n\}$ i $A = \{0, 1, \ldots, m\}$ i dwie funkcje f i g ze zbioru B na zbiór A takie, że $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $f(n) = g(n) = m$, z których każda jest *ciągła* w tym znaczeniu, że na elementach sąsiednich, j oraz $j+1$, przyjmuje wartości te same lub sąsiednie. Czy istnieje odcinek zbioru liczb naturalnych $C = \{0, 1, \ldots, p\}$ i funkcje (w powyższym znaczeniu) ciągłe $a\colon C \to B$ i $b\colon C \to B$ takie, że $f(a(j)) = g(b(j))$ dla każdego j? Z warunków zadania wynika, że $m \leqslant n \leqslant p$, skoro odwzorowania mają być „na".
Dla rozwiązania tego zadania spójrzmy na liczby naturalne z odcinka $B = \{0, 1, \ldots, n\}$ jako na numery współrzędnych pól szachownicy $(n+1) \times (n+1)$. Zaczernijmy te pola (i, j), dla których $f(i) = g(j)$. Dla przykładu: pola (0, 0) będą na pewno zaczernione, a pola $(0, n)$ i $(n, 0)$ pozostaną białe.

Na polach dotykających do prawego lub do dolnego brzegu szachownicy różnica $f(i)-g(j)$ jest nieujemna (jest tam bądź $j = 0$, a więc $g(j) = 0 \leqslant f(i)$, lub $i = n$, a więc $f(i) = n \geqslant g(j)$), a na polach dotykających do lewego lub górnego brzegu szachownicy ta sama różnica jest niedodatnia.
Pomyślmy *wieżę* stojącą na białym polu z prawego lub dolnego brzegu szachownicy. Nie może ona dojść po *białych* polach do żadnego z białych pól na górnym lub na lewym brzegu szachownicy: przechodząc z pola na pole sąsiednie wieża zmienia różnicę $f(i)-g(j)$ nie więcej niż o 1, więc idąc z pola, gdzie ta różnica jest dodatnia, na pole, gdzie ta różnica jest ujemna, musiałaby przejść przez pole, gdzie ta różnica jest równa 0, tj. przez pole zaczernione.
Nasze zadanie będzie rozwiązane, jeśli znajdziemy przejście dla *króla* z pola (0, 0) na pole (n, n) po polach *zaczernionych*. Istotnie, mając takie przejście i numerując chwile 0, 1, ... p począwszy od chwili 0, kiedy król stoi na polu (0, 0) do chwili p, kiedy król stanie na polu (n, n), dostaniemy dla każdej chwili t, $0 \leqslant t \leqslant p$, pozycję $(a(t), b(t))$ jego drogi; będzie zawsze $f(a(t)) = g(b(t))$, bo pola $(a(t), b(t))$ są zaczernione; funkcje a i b okażą się ciągłe, bo w chwilach sąsiednich, t i $t+1$, współrzędne $a(t)$ i $a(t+1)$ i tak samo współrzędne $b(t)$ i $b(t+1)$, różnią się nie więcej niż o 1. Czy takie przejście dla króla się znajdzie? Tak. Odpowiedź można znaleźć m.in. w „*Kalejdoskopie matematycznym*" Hugona Steinhausa (str. 32, wyd. 1956 r.), gdzie jest podana dla nieco innego zadania, a która w naszych warunkach tłumaczy się na następujące



Rys. 3. Szachownica 13 × 13 odpowiadająca funkcjom z rysunku 1. Nie ma drogi dla wieży, jest więc droga dla króla.

Twierdzenie o szachownicy. Jeśli pewne pola szachownicy są zaczernione tak, by wieża nie mogła przejść po polach białych z żadnego z pól leżących wzdłuż dolnego i wzdłuż prawego brzegu szachownicy do żadnego z pól leżących wzdłuż jej lewego i wzdłuż jej górnego brzegu, to król może przejść po polach zaczernionych z lewego dolnego rogu szachownicy do prawego górnego.

Napisano w „*Kalejdoskopie*", że jest to oczywiste, ale że dowód nie jest natychmiastowy. To twierdzenie o szachownicy można znaleźć także w innej książce Hugona Steinhausa „*Jeszcze sto zadań*" (tytuł tłumaczony z rosyjskiego; autor artykułu nie wie, czy ukazało się to po polsku), włączonej do jego książki „*Zadaczi i razmyszlenija*", jako zadanie 97 można je znaleźć na str. 103 wyd. 1974 r.) Pojawiło się ono również w „Delcie" nr 9/1980, jako zadanie M 235, służąc jako lemat w dowodzie dwuwymiarowego twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Te okoliczności stanowią wygodny pretekst dla autora artykułu, pozwalający mu na niezamieszczenie dowodu, który rzeczywiście nie jest natychmiastowy.
Analogiczne zadanie dla szachownicy heksagonalnej (płaski plaster pszczeli; bardziej symetryczne: znika w nim różnica między królem i wieżą) jest mniej kłopotliwe. Pisze o nim David Gale w artykule „*The Game of Hex and the Brouwer Fixed Point Theorem*", *The American Mathematical Monthly* 86 (1979), str. 818—827. Także i tym zadaniem można się posłużyć w dowodzie twierdzenia Brouwera. Zadanie w formie heksagonalnej pochodzi od Johna F. Nasha (1949), ale jest i prehistoria, o czym pisze Martin Gardner w rozdziale „*The Game of Hex*" na str. 73—83 swojej książki „*The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*", New York 1959.

*

Często spotyka się próby określenia tego, czym jest matematyka. W książce „*O poznawaniu. Szkice na lewą rękę*" Jerome S. Brunner (szkic „*O uczeniu się matematyki*", str. 130 i nast., PIW 1971, seria $\pm\infty$) pisze, że polega ona na sprowadzaniu zadań do łamigłówek, a potem do rozwiązywania tych łamigłówek. Jest to pogląd dość naturalny, ale nieczęsto wypowiadany, więc poparcie go autorytetem nie zaszkodzi.

*

Łamigłówka o królu i wieży pozwala rozwiązać zadanie o taternikach, które też z kolei wygląda na łamigłówkę wyodrębnioną dla rozwiązania innych zadań. Kazimierz Zarankiewicz wykorzystał (*Biuletyn PAN*, 2 (1954), str. 117—120) zadanie o taternikach dla podania prostego dowodu następującego twierdzenia Dysona (1951): mając funkcję ciągłą rzeczywistą na powierzchni kuli, znajdziemy zawsze koło wielkie i wpisany w nie kwadrat, na którego wierzchołkach funkcja przyjmuje te same wartości. J. P. Huneke (1969) wykorzystał zadanie o taternikach do zbudowania dwu funkcji ciągłych f i g przekształcających odcinek na siebie i takich, że $f \cdot g = g \cdot f$ (tj. przemiennych przy składaniu) oraz nie mających wspólnego punktu stałego, tj. takiego, że $f(x) = g(x) = x$, co obalało uzasadnioną wieloma przykładami hipotezę. Autor tego artykułu posłużył się (1962) zadaniem o taternikach do znalezienia prostego opisu kontinuum znanego pod nazwą pseudołuku (które jest kontinuum nierozkładalnym i którego wszystkie podkontinua wielopunktowe są nierozkładalne, ale który ma pewne własności wspólne z okręgiem), odkrytego (1922) przez Knastera i zbadanego dokładniej (1948) w pracach Binga i Moise'a. Jeśli funkcje f i g, ciągłe i bez przedziałów stałości są niekoniecznie kawałkami liniowe, to marszruty utrzymujące taterników na równych ze sobą wysokościach też się znajdą: w ich poszukiwaniu wykorzystuje się pewną własność topologiczną kwadratu, bardzo podobną do wykorzystywanej poprzednio własności szachownicy.

Rozwiązanie zadania F 114
W każdym z przypadków lód poddawany jest działaniu znacznych ciśnień, co dla wody powoduje obniżenie temperatury topnienia. Niezbędne do topnienia ciepło napływa z najbliższego otoczenia (sąsiednie warstwy lodu oraz drut). Powstająca pod drutem ciecz wypierana jest ponad drut, gdzie krzepnie pod normalnym ciśnieniem wydzielając ciepło. Wtapianie się drutu w bryłę lodu jest procesem ograniczanym przez szybkość transportu ciepła od krzepnącej wody do topniejącego w obszarze podwyższonego ciśnienia lodu. W przypadku drutu szybkość ta jest znaczna, gdyż metale są świetnymi przewodnikami ciepła. Nylon przewodzi ciepło słabo (około dziesięciokrotnie słabiej niż lód) i tym razem decydujące jest przewodnictwo lodu, które z kolei ustępuje przynajmniej o trzy rzędy wielkości przewodnictwu metali.